Stochastické modelování úrokových sazeb

Michal Papež
odbor řízení rizik

OBSAH PŘEDNÁŠKY

- Úvod do problematiky stochastických procesů
  - Brownův pohyb, Wienerův proces
  - Itoovo lemma
  - Stochastické difirenciální rovnice (SDE)

- Jednofaktorové modely
  - Rendelman, Bartter model
  - Vašíčkův model
  - Cox, Ingersoll, Ross (CIR) model

- Dvoufaktorové modely
  - Brennan-Schwartz model
  - Longstaff-Schwarz model

- Modelování úrokových sazeb pomocí CIR modelu ve výpočetním prostředí MatLab
  - Odhad parametrů
  - Použití MatLabu pro simulaci úrokových sazeb

- Využití CIR modelu pro oceňování úrokových instrumentů

Úvod do problematiky stochastických procesů

- Moderní finanční matematika používá pro řešení řady praktických úloh stochastického počtu
  - Oceňování finančních instrumentů – zejména finančních derivátů (např. Black-Scholes model)
  - Odhad budoucího vývoje ekonomických veličin (úrokové sazby, inflace, apod.)
  - Řízení rizik – aplikace metody Monte Carlo při výpočtu Value at Risk
- Pro zvládnutí těchto úkolů je třeba znát základní principy stochastických procesů
  - Brownův pohyb
  - Wienerův proces
  - Stochastické diferenciální rovnice (SDE)
  - Itoovo lemma

- Wienerův proces
  - Je to náhodný proces se spojitým časem W(t), t>0, W(0)=0
  - Přírůstek Wienerova procesu W(t)-W(s) je Gausovský se střední hodnotou E(x)=0 a rozptylem (t-s)
  - přírůstky Wienerova procesu jsou na sobě nezávislé

- Brownův pohyb
  - Původně fyzikální význam – popisuje neustálý a neuspořádaný pohyb molekul
  - Z matematického hlediska je to stochastický proces
  - Nejčastější příklad realizace Wienerova procesu

- Ekonometrická aplikace Brownova pohybu
  - Ceny aktiv na finačních trzích se podle teorie dokonalých trhů chovají zcela náhodně a nezávisle na předchozím vývoji
  - Brownův pohyb je tedy ideální nástroj popisující chování cen aktiv (akcie, měny, komodity)

- Přechod z diskrétní do spojité dynamiky
  - Nechť δW je přírůstek Wienerova procesu za čas δt, tj.:

$$\delta W = W(t+\delta t) - W(t)$$

Pak změnu Wienerova procesu Z(t) pro čas $\delta t \to 0$ můžeme napsat jako

$$dZ(t) = a\,dt + b\,dW(t)$$

kde: a, b jsou konstanty a $dW = \lim_{t \to 0} \delta W$

- K tomu, abychom mohli popsat chování ceny určitého aktiva (např. akcie) v čase, poslouží nám následující modifikace SDE:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

kde: dS je okamžitý přírůstek ceny akcie
μ je trend ve vývoji ceny akcie
σ je volatilita akcie
dW je přírůstek Wienerova procesu

- Abychom mohli výše uvedenou rovnici vyřešit, využijeme Itovo lemma.
  - Itoovo lemma je asi nejdůležitější vztah v stochastickém počtu
  - Itoovo lemma je obdoba Talorova rozvoje pro stochastické prostředí

- Taylorův rozvoj: $dF = \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dX^2$

- Itoovo lemma: $dF = \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dt$

- Velmi malé přírůstky funce F(X+dX) můžeme aproximovat pomocí Taylorova rozvoje (v případě deterministických proměnných) a pomocí Itoova lemma v případě stochastických proměnných

- Nechť S(X(t+h)) – S(X(t)) je přírůstek ceny akcie v intervalu t+h a F(S) = ln S Potom, s využitím Itoova lemma a můžeme napsat původní SDE do následujícího tvaru :

$$dF = \frac{dF}{dS}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2F}{dS^2}dt = \frac{1}{S}\left(\mu S dt + \sigma S dX\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dX$$

Tento tvar můžeme vyřešit integrováním a dostaneme:

$$S(t) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\int_0^t dX\right]$$

Živnostenská Banka
UniCredit Group

- Pro simulaci vývoje ceny akcie musíme převést předchozí spojitý tvar na diskrétní formu. Nejčastější metodou je tzv. Eulerova metoda. Diskrétní tvar logaritmické náhodné procházky ceny akcie je následující:

$$S(t+\delta t) = S(t) + \delta S = S(t)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,\phi\right]$$

kde: ϕ je náhodná veličina z rozdělení N(0,1)
δt je časový krok
μ je očekávaná výnosnost akcie
σ je volatilita ceny akcie

Jednofaktorové modely úrokových sazeb

- Na rozdíl od akcií má chování úrokových sazeb určité zvláštnosti
  - Úrokové sazby se pohybují v určitém rozmezí; obvykle nerostou do nekonečna ani neklesají pod nulu
  - Úrokové sazby mají tendenci se vracet k určité rovnovážné hodnotě
    - Tento fenomén se nazývá „mean reversion“

- Stochastické modely, které popisují chování úrokových sazeb musí tedy brát v úvahu výše uvedené vlastnosti

- Jednofaktorové modely úrokových sazeb berou v úvahu pouze jeden zdroj nejistoty popsaný jednou SDE

- V praxi jsou nejčastěji používány následující jednofaktorové modely
  - Rendleman-Bartter model
  - Vašíčkův model
  - Cox, Ingersoll, Ross mode (CIR model)

- Renlemann-Bartter model patří mezi základní jednofaktorové modely
- Dynamika úrokové sazby *r* je popsána pomocí SDE následovně

$$dr(t) = \mu r dt + \sigma r dW(t)$$

  - *r* následuje geometrický Brownův pohyb
  - Model pracuje s konstantním trendem a konstantní volatilitou
  - Model funguje na stejném principu jako model pro modelování ceny akcie
    - To je jeho hlavní nevýhoda, neboť nedokáže zajistit invertibilitu procesu
    - Pro modelování úrokových sazeb není tudíž vhodný

Vašíčkův model

- Vašíčkův model je pojmenován po jeho tvůrci – Oldřichu Vašíčkovi, který jej publikoval v roce 1977 v časopise „Journal of Financial Economics“
- Model je založen na principu Ornstein-Uhlenbeckově procesu („mean reverting“ proces) s konstantními koeficienty
- Dynamika úrokové sazby ve Vašíčkově modelu následovně

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

kde: a, b, σ jsou pozitivní konstanty
a je koeficient rychlosti přizpůsobení dynamiky rovnovážné úrokové míře *r*
b je rovnovážná úroková míra
σ je volatilita úrokové míry

- Výhodou Vašíckova modelu je (oproti předchozímu modelu) jeho invertibilita.
- Model je velice „tvárný“ a tudíž existují explicitní analytické formule pro oceňování řady úrokových instrumentů
- Avšak úrokové sazby mohou v reálném čase nabývat i záporných hodnot, což je v praxi dost nerealistický předpoklad
- r(t) má normální rozdělení

- Oceňovací formule pro bezkupónový dluhopis:

$$P(t;T) = e^{A(t;T) - r(t)B(t;T)}$$

Kde:

$$A(t;T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) [B(t;T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4a} B(t;T)^2$$

$$B(t;T) = \frac{1}{a} \left[1 - e^{-a(T-t)} \right]$$

Vašíčkův model - pokračování

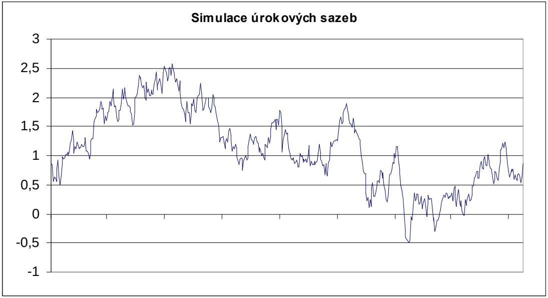
- Simulace úrokové sazby pomocí Vašíckova modelu:
  - Parametry modelu: a = 0,10

    b = 3,1

    σ = 20%

    Δt = 1

    r(0) = 3,50



- CIR model byl publikován v roce 1985 v článku „*A theory of the Term Structure of Interest Rates*“ v časopise „*Econometria*“
- Na rozdíl od Vašíčkova modelu není volatilita úrokových sazeb konstantní, ale je závislá na druhé odmocnině úrokové sazby, což zajišťuje, že simulovaná úroková sazba nikdy nenabude záporných hodnot pokud platí, že 2ab>σ
- Dynamika úrokových sazeb je v CIR modelu popsána následovně:

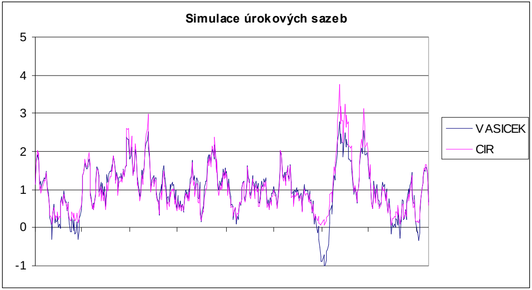
$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}\,dW(t)$$

kde: a, b, σ jsou pozitivní konstanty
a je koeficient rychlosti přizpůsobení dynamiky rovnovážné úrokové míře *r*
b je rovnovážná úroková míra
σ je volatilita úrokové míry

- Nespornou výhodou CIR modelu je jeho relativní jednoduchost (stejně jako Vašíčkův model) a i fakt, že úrokové sazby nemohou nabývat záporných hodnot

Cox, Ingersoll, Ross model - pokračování

- Následující graf srovnává simulaci úrokových sazeb pomocí Vašíčkova modelu a CIR modelu



- Je zřejmé, že úrokové sazby simulované pomocí Vašíčkova modelu mohou lehce nabývat záporných hodnot, kdežto u CIR modelu tato situace nikdy nenastane (je-li splněna podmínka – 2ab>σ)
- V CIR modelu volatilita závisí na dynamice úrokových sazeb. Čím jsou větší přírůstky simulované úrokové sazby, tím je i větší volatilita procesu.

Cox, Ingersoll, Ross model - pokračování

- Stochastická proměnná r(t) nemá v CIR modelu normální rozdělení, ale non-central chí kvadrát rozdělení $\chi^2(n,c)$,kde *n* je počet stupňů volnosti a ***c*** je parametr vychýlení
- Obdobně jako u Vašíčkova modelu existuje i pro CIR model analytická formule pro ocenění bezkupónového dluhopisu, která má stejný tvar. Avšak parametry A a B jsou rozdílné a jsou dány následovně:

$$A(t;T)=\left[\frac{2\gamma\cdot e^{(a+\gamma)(T-1)/2}}{(\gamma+a)\cdot(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$B(t;T)=\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)\cdot(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$$

$$\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}$$

Dvoufaktorové modely

- Jednofaktorové modely pracují s jedním zdrojem nahodilosti – tj. s jedním faktorem vyjádřeným jednou SDE
- Jeden zdroj nejistoty může být za určitých okolností limitující pro modelování méně obvyklých tvarů výnosových křivek
- Jednofaktorové modely byly tudíž dále rozvíjeny tak, aby mohly lépe zachytit anomálie ve tvaru výnosových křivek
- Dvoufaktorové modely pracují s dvěma zdroji nahodilosti
- Důvodem použití dvoufaktorových modelů je tedy potřeba modelovat různé „nestandardní“ tvary výnosových křivek, které jednofaktorové modely neumožňují zachytit

Dvoufaktorové modely – Brennan Schwartz

- Krátkodobá úroková sazba v Brennan Schwartz modelu vyhovuje rovnici

$$dr(t) = [a_1 + b_1(l(t) - r(t))]dt + \sigma_1 r dW_1(t)$$

- Dlouhodobá úroková sazba je charakterizována následovně:

$$dl(t) = [a_2 + b_2 r + c_2 l]dt + \sigma_2 l dW_2(t)$$

- Nevýhodou modelu je jeho relativní složitost
  - Vlastnosti dluhodobé a krátkodobé sazba musí splňovat jisté požadavky na konsistentnost
  - Úrokové sazby mohou v konečném čase růst do nekonečna, což není reálný předpoklad

- Longstaff Schwartz model vznikl rozšířením původního CIR modelu a je charakterizován dvěma SDE takto:

$$dX(t) = a\left(\bar{x} - x(t)\right)dt + \sqrt{x(t)}\,dW_1(t)$$

$$dy(t) = b\left(\bar{y} - y(t)\right)dt + \sqrt{y(t)}\,dW_2(t)$$

  - Kde krátkodobá úroková sazba je pak dána následovně:

$$r(t) = cx(t) + dy(t)$$

Jednofaktorové vs. vícefaktorové modely

Jednofaktorové modely (CIR, Vašíčkův model) předpokládají, že ceny všech dluhopisů jsou závislé pouze na pohybu r(t), tudíž všechny ceny dluhopisů jsou závislé pouze na jednom rizikovém faktoru

Je však tento předpoklad realistický?

Paralelní posuny výnosových křivek vysvětlují až 80% všech pohybů úrokových sazeb

Jednofaktorové modely tudíž poskytují vhodnou aproximaci pro modelování úrokových sazeb

- Výpočetní prostředí MatLab můžeme využít pro:
  - Odhad parametrů modelu
  - Samotnou simulaci scénářů úrokových sazeb
  - Ocenění úrokových instrumentů pomocí CIR modelu

- Problematika odhad parametrů CIR modelu:
  - Dvě možné cesty odhadu
    - odhad parametrů z aktuálního tvaru výnosové křivky (statická metoda)
    - odhad parametrů z historického vývoje úrokových sazeb (dynamická metoda)

- Statická metoda odhadu parametrů
  - Každý den jsou parametry odhadovány z aktuálního tvaru výnosové křivky metodou nelineárních nejmenších čtverců
  - Tato metoda popisuje situaci jednoho jediného dne (nebere v potaz historii), což je její velká nevýhoda

- Dynamická metoda odhadu parametrů
  - CIR model definuje stochastický vývoj úrokové sazby v čase, tudíž je logické odhadovat parametry procesu z předchozí dynamiky sazeb
  - Kroky při odhadu parametrů jsou následující
    - Volba reprezentativní krátkodobé úrokové sazby - jaký tenor použít?
    - Volba vhodného historického časového vzorku, ze kterého budeme parametry odhadovat – jaký horizont?
    - Volba statické metody odhadu parametrů – nejčastěji používaná metoda je „Metoda maximální věrohodnosti“

- Dynamická metoda odhadu parametrů popisuje průměrnou situaci v dynamice úrokových sazeb za posledních *n* dní

- Vhodný kandidát na reprezentativní krátkodobou úrokovou sazbu

Úroková sazba musí být krátkodobá – (tj. z krátkého konce výnosové křivky)

AVŠAK

- Příliš krátké úrokové sazby vykazují určité anomálie (poměrně dlouhá období relativně stabilních sazeb střídají silné skokové pohyby jako důsledek externích šoků v podobě zásahů centrální banky)

- L. Trosantucci – A. Umboldi navrhují pro modelování EUR výnosové křivky použít 3M EURIBOR

- Podle zkušeností z českého prostředí se jeví jako užitečnější použít 6M PRIBOR (tento tenor můžeme považovat ještě za krátkodobou úrokovou sazbu, která však již nevykazuje tak významné jednorázové skoky v její dynamice)

- Volba vhodného časového horizontu pro odhad parametrů
  - Z hlediska přesnosti odhadu je žádoucí použít pokud možno co nejdelší historickou časovou řadu
  - Z hlediska aktuálnosti je vhodné naopak použít pokud možno data z velmi krátké minulosti

KOMPROMIS

  - Mezi výše uvedenými extrémy je nutné najít kompromis
  - Jako rozumný kompromis se jeví posledních 600-700 obchodních dní s diskrétním časovým krokem $\Delta = 1/250$ (250 obchodních dní za rok)

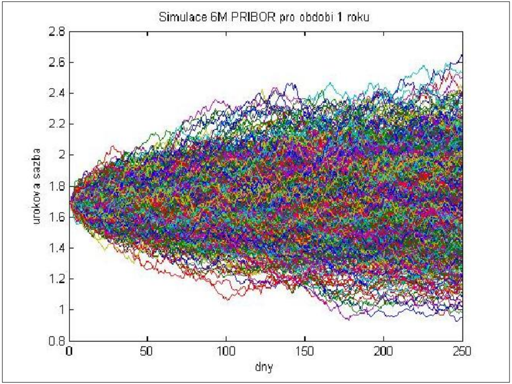
- Výpočet parametrů pro 6M PRIBOR provedeme metodou maximální věrohodnosti v prostředí MatLab s následujícími výsledky

- Odhadnuté parametry procesu simulujícího 6M PRIBOR

Parametry CIR modelu	Denní hodnoty	Anualizované hodnoty
a	0,000542	0,1354
b	1,746925	1,7469
σ	0,013886	0,2194

- Na základě takto odhadnutých parametrů můžeme simulovat budoucí vývoj úrokových sazeb pro libovolný tenor výnosové křivky

- Příklad simulace (1000 simulací) 6M PRIBORu pro období jednoho roku s využitím výpočetního prostředí MatLab



Využítí CIR modelu pro oceňování úrokových instrumentů

- Základní úrokové nástroje (dluhopisy s fixním kuponem, FRN, IRS, FRA) se dají oceňit velice jednoduše jako současná hodnota všech budoucích peněžních toků
  - Pomocí CIR modelu lze snadno ocenit jednoduché zero bondy

$$P(t;T) = e^{A(t;T) - r(t)B(t;T)}$$

- Některé typy dluhopisů se speciální konstrukcí kuponu nelze ocenit žádnou analytickou formulí
  - TARN (target redemtion note)
  - Snowball Range Accrual Note
  - Excess Return Index Linked Note

- Zde hraje nezastupitelnou úlohu právě simulace úrokových sazeb

- **Příklad ocenění TARN bondu**

Maturita	15 let
Emisní cena	100%
Kupon:	1 rok – 6,75%
	poté (9% - (2*6M PRIBOR(t)))
Trigger level:	9.5%
TARN redeption:	Dluhopis je svolán v okamžiku, kdy suma vyplacených kuponů je rovna nebo překročí hodnotu „trigger level“

Ocenění takovéhoto dluhopisu je možné s využitím simulace budoucího vývoje 6M PRIBORu.

Využítí CIR modelu pro oceňování úrokových instrumentů

- Postup ocenění TARN bondu
  - Volba vhodného stochastického procesu (v našem případě bude zvolen CIR model)
  - Odhad parametrů příslušného procesu (viz. str. 26 této prezentace)
  - Vygenerování scénářů budoucího vývoje 6M PRIBORu (10 000 simulací je považováno za minimum)
  - Zvolení hodnoty budoucího 6M PRIBORu z vygenerovaného scénáře (tj. výpočet příslušného percentilu)
    - V našem případě je pro nás riziko růstu úrokových sazeb, tudíž budeme počítat nejhorší možný vývoj (95-99 percentil z příslušného scénáře)
  - Výpočet kuponu TARNu (dle formule na str. 29)
  - Výpočet diskontovaných peněžních toků z TARNu a určení současné hodnoty

Prostor pro otázky a pro diskusi

Děkuji za pozornost

Michal Papež
Živnostenská banka, a.s.
Odbor řízení rizik
papez@zivnobanka.cz
+420 224 127 119

Použitá literatura

- Ahangarani, P. – An Empirical Estimation and Model Selection of the Short Term Interest Rate, working paper
- Brigo, D., Mercurio F. - Interest Rate Models, Theory and Practice, Springer-Verlag Berlin, 2001
- Jackson, M., Staunton, M. – Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA, John Wiley & Sons, 2001
- Jorion, P. – Value at Risk: The benchmark for controlling Market risk, The McvGraw-Hill companies, 1997
- Trosantucci, L. – Umboldi, A. – Static and Dynamic Approach to the CIR Model and Empirical Evaluation of the Market Price of Risk, working paper
- Wilmott, P. – Derivatives, The theory and practice of financial engineering, John Wiley & Sons, 1998