Výpočet doby potřebné ke změně náklonu letounu Ae 270 o 60°

Mgr. Jan Slavík
AERO Vodochody a.s.

Abstrakt
Příspěvek obsahuje popis výpočtu změny příčného náklonu letounu Ae 270 o 60°, neboť předpis FAR požaduje, aby tato doba nepřekročila stanovenou mez. Příspěvek dále obsahuje fyzikální popis pohybu letounu, použité nástroje MATLABu a výsledky výpočtu.

1. Úvod

Jedním z letadel, vyráběným v letecké továrně AERO Vodochody a.s., je i aerotaxi Ae 270. Ae 270 je dolnoplošný jednomotorový turbovrtulový víceúčelový transportní letoun. AERO se plně podílí na vývoji, výrobě prototypu, certifikaci, sériové výrobě a prodeji tohoto letounu společně s tchaiwanskou firmou Aerospace Industrial Development Corporation (AIDC). V současnosti jsou podepsány rámcové kupní smlouvy na 51 letadel Ae 270 se zákazníky v Jihoafrické republice, USA, Indii a Austrálii.

Abychom však mohli tento letoun prodat, je nutné, aby prošel certifikací úřadu FAA (Federal Aviation Administration). Tento úřad, mimo jiných aktivit, vydává předpisy, které obsahují řadu přísných kritérií pro konstrukci a vlastnosti letadel, aby mohli létat ve vzdušném prostoru USA. V našem případě se jedná o předpis FAR (Federal Aviation Regulations), část 23 (Airworthiness standarts – Normal cathegory aircrafts), §23.157 (Rate of roll – doba klonění). Přesná verze předpisu a jeho vysvětlení je v části 2, nebo je možné jej najít na adrese www.access.gpo.gov/nara/cfr/cfrhtml_00/Title_14/14cfr23_00.html. Mimo vyšetřování těchto vlastností zkušebním letem je vhodné simulovat chování (v tomto případě pohybu) letounu nějakým vhodným softwarem. Takovou simulací jde ověřit, zda-li letoun splňuje kritéria z oddílu letových vlastností ještě před vlasním zkušebním letem. Je zřejmé, že pro simulaci pohybu letounu je tím vhodným prostředkem software MATLAB. Proto ve firmě AERO byl v MATLABu naprogramován pohybový model letounu Ae 270.

2. Zadání úlohy

Podle §23.157 v předpisu FAR má letadlo splňovat následující podmínku:
Při přiblížení musí být možné, použitím vhodné kombinace řídících ploch, naklonit letadlo ze zatáčky s náklonem +30° o úhel 60°, tj. do zatáčky s náklonem –30° a to v čase (W+2800)/2200 s, ale ne více jak za 7 s, kde W je maximální váha letounu v librách.
(Toto je část předpisu upravená pro letouny s maximální hmotností více jak 6000 lb, což je náš případ, neboť maximální hmotnost Ae 270 je 3200 kg ≈ 7054,8 lb).

Požadavky musí být splněny pro klonění v obou směrech a při splnění následujících požadavků:

a) Klapky v přistávací konfiguraci,
b) podvozek vysunut,
c) motor v režimu přiblížení pod úhlem 3°,
d) letoun vyvážen při rychlosti VREF.

Smyslem tohoto předpisu je splnění dostatečné "řiditelnosti" letounu v příčném směru ve fázi přiblížení na přistání. Předpis jinými slovy říká, že letoun musí být schopen „dostatečně" rychlé změny náklonu ve fázi přiblížení na přistání. Rychlost klonění je v předpisu popsána dobou klonění o 60° (označovaná jako $t_{60°}$). „Dostatečně" rychlá změna náklonu znamená, že letoun provede zmíněný manévr za dobu kratší, než je stanovená mez. Podmínky a) až d) pouze znamenají, že se jedná o přiblížení na přistání.

3. Fyzikální popis úlohy

Cílem je modelovat pohyb letounu, což je popsáno následující soustavou diferenciálních rovnic, odvozenou z Newtonovými pohybových rovnic (viz např. [1]):

$$\left.\begin{aligned}
m(dU/dt - VR + WQ) &= G_x + F_{Ax} + F_{Tx}, &\quad (S.1)\\
m(dV/dt + UR - WP) &= G_y + F_{Ay} + F_{Ty}, &\quad (S.2)\\
m(dW/dt - UQ + VP) &= G_z + F_{Az} + F_{Tz}, &\quad (S.3)
\end{aligned}\right\}\ \text{Rovnice sil}$$

$$\left.\begin{aligned}
I_{xx}\,dP/dt - I_{xz}dR/dt - I_{xz}PQ + (I_{zz} - I_{yy})QR &= L_A + L_T, &\quad (S.4)\\
I_{yy}\,dQ/dt + (I_{xx} - I_{zz})PR + I_{xz}(P^2 - R^2) &= M_A + M_T, &\quad (S.5)\\
I_{zz}\,dR/dt - I_{xz}\,dP/dt + (I_{yy} - I_{xx})PQ + I_{xz}QR &= N_A + N_T, &\quad (S.6)
\end{aligned}\right\}\ \text{Rovnice momentů}$$

$$\left.\begin{aligned}
P &= d\Theta/dt - d\Psi/dt\,\sin(\Theta), &\quad (S.7)\\
Q &= d\Theta/dt\,\cos(\Phi) + d\Psi/dt\,\cos(\Theta)\sin(\Phi), &\quad (S.8)\\
R &= d\Psi/dt\,\cos(\Theta)\cos(\Phi) - d\Theta/dt\,\sin(\Phi). &\quad (S.9)
\end{aligned}\right\}\ \text{Kinematické rovnice}$$

Je to soustava 9-ti nelineárních diferenciálních rovnic. Vysvětleme teď, co značí jednotlivé neznámé v rovnici:

U, V a W jsou složky vektoru rychlosti pohybu letadla v letadlové soustavě souřadnic

G_x , G_y , G_z jsou složky tíhy letadla v letadlové soustavě souřadnic,

F_{ax}, F_{ay}, F_{az} jsou složky aerodynamické síly v letadlové soustavě souřadnic,

F_{Tx}, F_{Ty}, F_{Tz} jsou složky tahu pohonných jednotek v letadlové soustavě souřadnic,

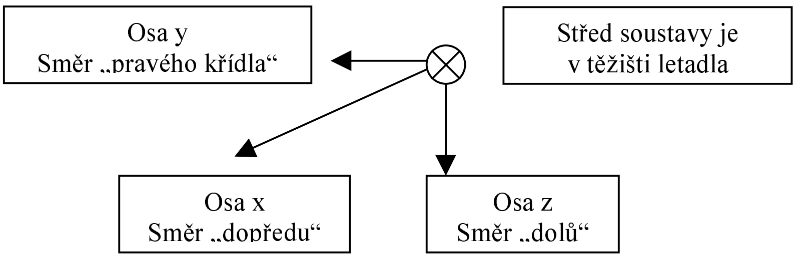
M_A, L_A, N_A jsou složky aerodynamického momentu v letadlové soustavě souřadnic,

M_T, L_T, N_T jsou složky momentu od pohonných jednotek v letadlové soustavě souřadnic,

P, Q, R jsou složky vektoru úhlové rychlosti pohybu letadla v letadlové soustavě souřadnic,

Φ, Θ, Ψ jsou Eulerovy úhly, které popisují transformaci ze zemské soustavy souřadnic do letadlové soustavy souřadnic.

Následující náčrtek osvětluje pojem letadlové soustavy souřadnic, která je svázána pevně s letadlem:



Zemská soustava souřadnic má za počátek nějaký zvolený bod na povrchu elipsoidu, nahrazujícího povrch země. Osa x směřuje „severně“, osa y „východně“ a osa z „dolů“.

Eulerovské úhly popisují jednoznačně transformaci ze zemské soustavy souřadnic na letadlovou a to podle následujícího postupu:

1) otočíme letoun podle osy z o úhel Ψ, kladný smysl je po směru hodinových ručiček při pohledu ze shora, Ψ je takzvaný azimut,
2) otočíme letoun podle osy y o úhel Θ, kladný smysl je nosem dolů, Θ je takzvaný podélný sklon letounu,
3) otočíme letoun podle osy x o úhel Φ, kladný smysl je pravým křídlem dolů, Φ je takzvaný příčný náklon, je to ta veličina, kterou chceme vypočítat.
4) Po těchto třech krocích byla zemská soustava převedena do letadlové soustavy.

Zdálo by se, že soustava S je postačující i pro numerický výpočet pohybu na počítači. Avšak nejčastěji modelovaný pohyb letounu je rovnoměrný přímočarý pohyb (horizontální, stoupavý či klesavý). Při tomto pohybu je nastolena rovnováha sil. Např. v rovnici (S.3) je z-tová složka tíhové síly G_z vyrovnána součtem z-tových složek aerodynamické a tahové síly. Neboli, v absolutní hodnotě G_z je stejná jako $F_{Az} + F_{Tz}$, avšak mají různá znaménka a v součtu vychází 0.

Při rozdílu dvou stejně velkých čísel v počítači, což je přesně tento případ, se projevuje jev „cancellation“, česky označen jako „ztráta přesnosti“. Při tomto jevu dochází k naprosté ztrátě relativní přesnosti výpočtu a tím i k selhání výpočtu. Jev ilustrujme na následujícím příkladu.

Příklad :

Předpokládejme, že výpočet se provádí na 5 desetinných míst.

$$\left.\begin{array}{l} P = 1{,}0001 \\ Q = 1{,}0000 \end{array}\right\}$$ dvě skoro stejná čísla , představují přesné výsledky předchozích výpočtů

P-Q = 0,0001 rozdíl byl vypočten přesně

Předpokládejme ale, že veličina Q nebyla v předchozím vypočtena přesně, tj. zahrnuje nějakou chybu, třeba zaokrouhlovací.

P´ = 1,0001;

Q´ = 0,9999; tj. relativní chyba je (Q´ – Q)/Q = 0,0001 = 0,1%;

Po provedení rozdílu získáme

P´- Q´ = 0,0002; tj. relativní chyba je (P´- Q´ - (P-Q)) / (P-Q) = 2 = 200% !!!

Na tomto jednoduchém případě bylo osvětleno, že při rozdílu dvou stejně velkých čísel se ztrácí relativní přesnost výpočtu.

Řešením problému je použít jiný zápis rovnic pohybu, tzv. odchylkový model. Myšlenka je prostá. Všechny veličiny letu rozdělíme na ustálenou část, která popisuje stav letounu v ustáleném stavu, a odchylku veličiny od ustálené části, neboli:

Veličina letu = referenční (ustálená) hodnota veličiny + odchylka veličiny

Pro vysvětlení upravme 3. rovnici v soustavě (S) do odchylkového tvaru:

$$
\begin{aligned}
&U = U_1 + u; \quad P = P_1 + p; \quad \Phi = \Phi_1 + \varphi;\\
&V = V_1 + v; \quad Q = Q_1 + q; \quad \Theta = \Theta_1 + \theta;\\
&W = W_1 + w; \quad R = R_1 + r; \quad \Psi = \Psi_1 + \psi;
\end{aligned} \tag{1}
$$

Po dosazení do rovnice (S.3) a linearizaci obdržíme

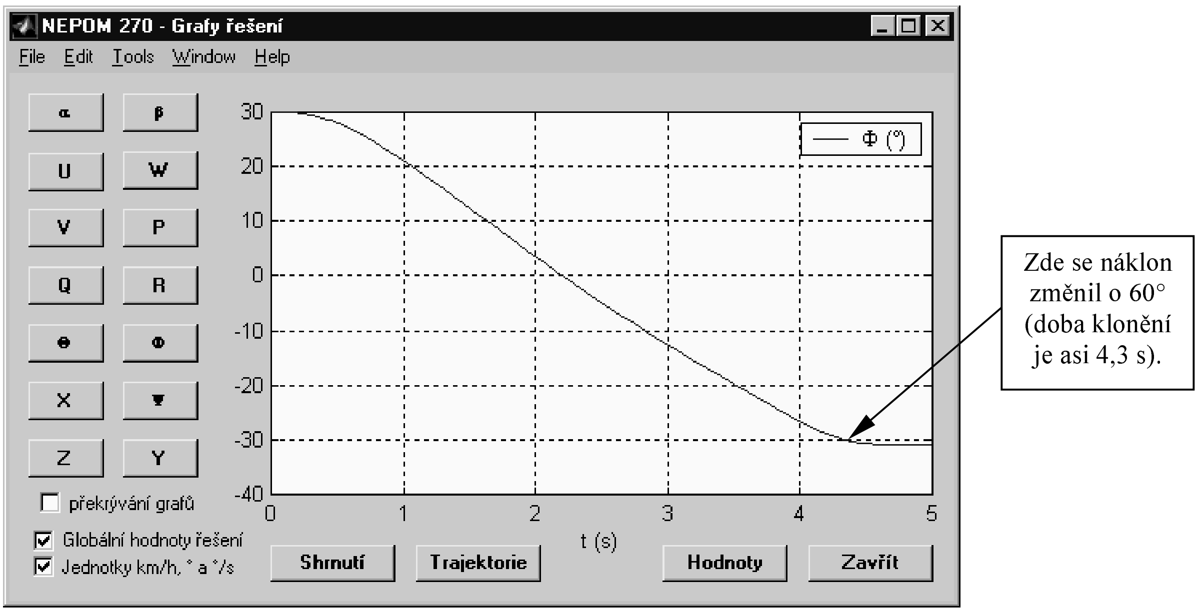
$$
\begin{aligned}
&\underline{m(-U_1Q_1 + V_1P_1)} + m(dw/dt - U_1q - Q_1u + V_1p + P_1v) + m(-uq + vp) =\\
&= \underline{mg\cos(\Phi_1)\sin(\Theta_1)} + F_{Az1} + F_{Tz1} - mg\theta\cos(\Phi_1)\sin(\Theta_1) - mg\varphi\sin(\Phi_1)\cos(\Theta_1) + f_{Az} + f_{Tz} +\\
&\quad + mg\varphi\theta\sin(\Phi_1)\cos(\Theta_1).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Podtržené členy se odečtou, neboť referenční hodnoty veličin splňují rovnici (S.3), kde součet sil je 0. Právě tato úprava odstraní z výpočtu operaci odečítání „stejně“ velkých čísel, což je příčinou jevu „cancellation“. Tudíž rovnice v soustavě (S) musely být přeformulovány do odchylkového tvaru, kdy neznámými nejsou hodnoty veličin letu, ale odchylky těchto veličin od referenčních hodnot.

4. Způsob řešení úlohy v MATLABu

Způsob řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic prostředky MATLABu je dostatečně popsán v manuálu MATLABu. Pravá strana soustavy se zapsala do souboru. Jako řešič pro tento případ byla používána Dormand-Princeova dvojice schémat typu Runge-Kutta, implementována ve funkci ode45.

Modeloval se klonivý manévr letadla podle zadání. Aerodynamická data byla nastavena tak, aby odpovídala předepsanému režimu letu. Stejně tak byl nastaven i režim motoru. Letoun byl vyvážen na rychlost letu V_{REF} podle předpisu. Klonění bylo zajištěno výchylkou křidélek, což jsou pohyblivé části křídla k naklánění letounu kolem podélné osy (osy x). Průběh náklonu $\Phi(t)$ je viditelný z následujícího obrázku:



Manévr se modeloval pro různé hmotové konfigurace letounu. Hmotové konfigurace představují „rozložení hmoty“ letounu (palivo, cestující či náklad) a jsou charakterizovány hmotností a momenty setrvačnosti letounu. Viz následující tabulka:

Hmotová konfigurace	m (kg)	I_x (kgm^2)	I_y (kgm^2)	I_z (kgm^2)	I_{xz} (kgm^2)
č. 1918	3150	11291	16331	26018	835
č. 1211	2080	5839	15937	20375	896
č. 1219	2980	14796	16134	29375	911
č. 1916	2700	6865	16245	21529	831
č. 1813	3150	6607	17780	22433	1142

Také se modelovala závislost doby klonění na rychlosti.

5. Výsledky simulace

Podle části 2 musí být zmíněná doba klonění menší než (W+2800)/2200 s, ale ne více než 7 s, kde W je maximální hmotnost letounu v librách. Protože W = 7054,8 lb (3200 kg), pak mezní doba klonění je asi 4,6 s.

Vypočtené hodnoty doby klonění t_{60° lze porovnat s mezní dobou klonění. Následující tabulka shrnuje výsledky výpočtů:

Hmotová konfigurace	V_{REF} (km/h)	t_{60° (s)
č. 1918	142,2	3,8
č. 1211	115,6	4,4
č. 1219	138,3	4,3
č. 1916	131,3	3,9
č. 1813	142,2	3,6

Z tabulky je zřejmé, že ani v jedné hmotové konfiguraci nepřesáhla doba klonění mez 4,6 s danou předpisem FAR §23.157. Podle těchto výpočtů lze tvrdit, že letoun Ae 270 splní část §23.157.

Také z tabulky lze vysledovat, že zásadní vliv na dobu klonění t_{60° má rychlost letu a to v tom smyslu, že čím větší rychlost, tím menší doba klonění. Další – avšak menší - vliv na dobu klonění t_{60° má moment setrvačnosti I_x kolem osy x. Čím větší moment setrvačnosti, tím větší doba klonění.

6. Literatura

[1] J. Roskam – *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*, Roskam Aviation and Engineering Corporation, 1994

[2] K. Bittner, J. Slavík – *Výpočet doby potřebné ke změně příčného náklonu o 60° podle předpisu FAR-23 a odpovídající síly v příčném řízení u letounu Ae-270*, interní zpráva A-3399, AERO Vodochody a.s., 2000

[3] B.L. Stevens, F.L.Lewis – *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley & Sons. Inc., 1992

[4] The MathWorks – *Using MATLAB*, Version 5, Natick, MA, USA 1998

[5] J.Stoer, R.Bulirsch – *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York 1980, ISBN 0-387-90420-4

7. Kontaktní adresa

J.Slavík, oddělení aerodynamiky (338), AERO Vodochody a.s., Odolena Voda, 25070, tel. +421-2-86032799, e-mail: jan.slavik@aero.cz