

MODELOVÁNÍ HŘÍDELOVÉ SOUSTAVY S ČELNÍMI OZUBENÝMI KOLY

Ing. Karel Jiříčka
ČVUT v Praze, fakulta strojní

1. Úvod

Pro sestavování pohybových rovnic diskretních soustav je vhodné vyjít z Lagrangeových rovnic druhého druhu formulovaných pro zobecněné souřadnice $q(t)$ v maticovém tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q} + \frac{\partial E_P}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = f(t), \quad (1)$$

kde jsme zavedli vektory zobecněných souřadnic a vektor buzení

$$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T, f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]^T. \quad (2)$$

Kinetická energie E_k , potenciální energie E_p a disipační energie R se u diskretních lineárních soustav s konstantními koeficienty nechají ve většině případů vyjádřit ve tvaru tzv. kvadratických forem

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q}, \quad E_p = \frac{1}{2} q^T K q, \quad R = \frac{1}{2} \dot{q}^T B \dot{q}, \quad (3)$$

kde $M = [m_{ij}]$ je reálná konstantní a symetrická matice hmotnosti, $K = [k_{ij}]$ matice tuhosti a $B = [b_{ij}]$ matice tlumení, všechny řádu n .

Vyjádříme-li funkce energie E_k , E_p a R v (1) ve tvaru (3) dostaneme pohybové rovnice diskretní lineární soustavy s konstantními koeficienty v maticovém tvaru

$$M \ddot{q} + B \dot{q} + K q = f(t). \quad (4)$$

V obecném případě mohou být matice B a K nesymetrické. Speciálním případem je matice tlumení B splňující podmínku proporcionálního tlumení

$$B = \sum_{j=0}^{r-1} c_j M (M^{-1} K)^j; \quad 1 \leq r \leq n \quad (5)$$

nebo obecnější podmínku komutativní matice tlumení

$$K M^{-1} B = B M K^{-1}. \quad (6)$$

Dále zavedeme označení pro soustavu (4) jako *konzervativní* je-li $K = K^T$ a $B = 0$, *slabě nekonzervativní* pro $K = K^T$ a B ve tvaru (5), popř. (6). Ostatní modely budeme označovat jako *silně nekonzervativní*.

Zjednodušující předpoklad (5) a (6) je u reálných soustav přijatelný jen v případě slabě tlumených soustav, kdy pro nejvyšší uvažovanou budící frekvenci platí $\|\omega B\| \leq \|K\|$. Takové soustavy zpravidla neobsahují funkční tlumící členy (např. hltič kmitů, nebo tlumiče pérování vozidel apod.) a matice tlumení B představuje jen vnitřní materiálové tlumení.

2. Modelování rotorů metodou konečných prvků

Uvažované modely pro řešení vlastních čísel a vlastních vektorů subsystémů respektují spojitě rozloženou hmotu hřídelů kruhového průřezu. V libovolných místech mohou být pevně na hřídeli nasazeny tuhé kotouče. Jde o modely se spojitě i diskretně rozloženými parametry. Pro jejich diskretizaci se používá metoda konečných prvků.

2.1 Matice hřídelových prvků

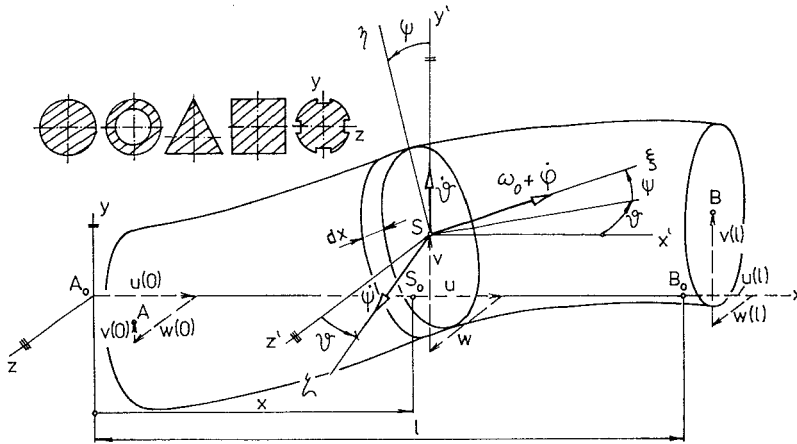
Pro výpočet je nutné sestavení matic hřídelových prvků. Uvažujme hřídelový prvek "e" o délce l (obr. 1). Deformace v místě x podél prvku vyjádříme v pevném souřadnicovém systému x, y, z s počátkem v uzlu A_0 . Jsou popsány podélnou výchylkou $u(x)$, příčnými výchylkami $v(x)$, $w(x)$ středu průřezu a Eulerovými úhly $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ natočením roviny řezu a $\varphi(x)$ torzního natočení. Uvažujme rovnoměrné otáčení hřídele úhlovou rychlostí ω kolem

osy ξ kolmé na rovinu řezu. Pro odvození matic hřídelového prvku sestavíme kinetickou a deformační energii hřídelového prvku. Prostorový pohyb hmotného elementu o délce dx ve vzdálenosti x od počátku rozložíme základním rozkladem v jeho středu hmotnosti S na unášivý pohyb rychlostí

$$\mathbf{v}(x) = [\dot{u}(x) \dot{v}(x) \dot{w}(x)]^T \quad (7)$$

a na relativní sférický pohyb okamžitou úhlovou rychlostí

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\mathcal{G}}(x) + \vec{\psi}'(x) + \vec{\varphi}'(x) \quad (8)$$



Obr. 1 : Hřídelový prvek

Kinetická energie hřídelového prvku je

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x) \mathbf{v}^T(x) \mathbf{v}(x) + \omega^T(x) \mathbf{J}(x) \omega(x)] \rho dx \quad (9)$$

kde $A(x)$ je plocha průřezu, ρ hustota materiálu a $\mathbf{J}(x)$ je diagonální matice určená polárním a kvadratickým momentem průřezu.

Potenciální energie hřídelového prvku je

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{A(x)} \{E \varepsilon_x^2(x) + G [\gamma_{xz}^2(x) + \gamma_{xy}^2(x)]\} dA(x) dx \quad (10)$$

kde E, G jsou moduly pružnosti v tahu a smyku a $\varepsilon_x, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ jsou komponenty přetvoření.

Matice hřídelového prvku odvodíme po vyloučení vektorů \mathbf{c}_i z podmínky ekvivalence levých stran Lagrangeových rovnic a modelu aplikovaných na netlumený hřídelový prvek "e"

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} \quad (11)$$

Z této rovnosti získáme matici hmotnosti $\mathbf{M}^{(e)}$, gyroskopických účinků $\mathbf{G}^{(e)}$ a matici tuhosti $\mathbf{K}^{(e)}$ hřídelového prvku.

2.2 Matematický model rotoru

Hřídel rozčleníme pomocí počtu m uzlů na hřídelové prvky $e = 1, 2, \dots, m - 1$. Matice hřídelových prvků je poté nutné transformovat do konfiguračního prostoru, který je definován vektory přemístění uzlů

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = [u(0) v(0) \psi(0) w(0) \mathcal{G}(0) \varphi(0) u(l) v(l) \psi(l) w(l) \mathcal{G}(l) \varphi(l)]^T \quad (12)$$

transformačním vztahem $\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{q}}^{(e)}$, (13) kde \mathbf{T} je transformační matice.

Transformované matice hřídelových prvků z prostoru souřadnic $\mathbf{q}^{(e)}$ do prostoru souřadnic $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}$ mají tvar

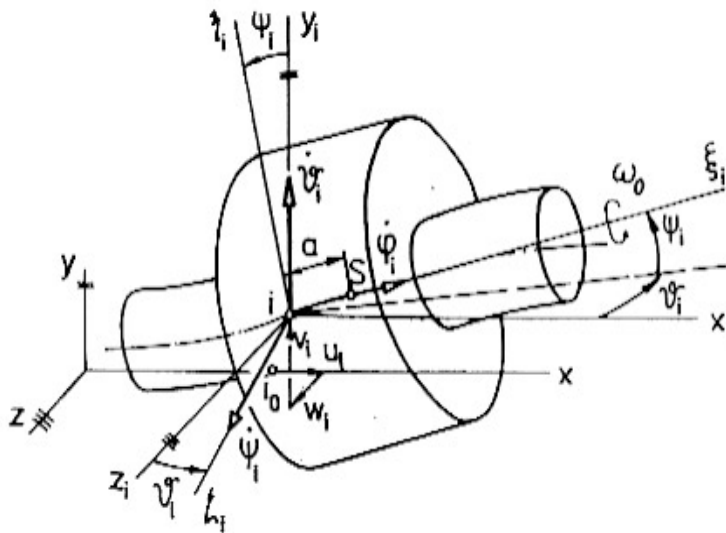
$$\tilde{\mathbf{X}}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{T} \quad , \quad \mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K} \quad . \quad (14)$$

Matematický model rotoru s tuhými kotouči nasazenými na hřídel má tvar:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad , \quad (15)$$

kde

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{K} \end{matrix} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right] , \quad \mathbf{B} = \beta \mathbf{K} + \left[\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$$



Blokové matice řádu 12 v prvních členech představují transformované matice hřídelových prvků. Blokové matice řádu 6 v druhých členech odpovídají maticím diskretním prvkům (kotoučům a podporám). V případě rotačně symetrického kotouče (obr. 2) centricky, kolmo a pevně nasazeného na hřídeli v uzlu "i" získáme matici hmotnosti

Obr. 2 : Rotačně symetrický kotouč

$$\mathbf{M}_k = \left[\begin{array}{cccccc} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m a & I + m a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -m a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m a & I + m a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 \end{array} \right] ,$$

kde I a I_0 jsou momenty setrvačnosti, m je hmotnost kotouče, a je vzdálenost středu hmotnosti kotouče S od uzlu "i". Dále získáme matici gyroskopických účinků kotouče

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V případě kotoučů excentricky uložených s excentricitou e a šikmým nasazením s malým úhlem γ k ose ξ vzniká dynamická nevyváženost kotouče, která se navenek projevuje odstředivou silou $O = m e \omega^2$ a setrvačnou dvojicí $M^D \doteq (I - I_0) \gamma \omega^2$. Po transformaci do uzlu “i” tomu odpovídá v modelu rotoru vektor buzení

$$\mathbf{f}(t) = [\dots \mathbf{0}^T \quad \mathbf{f}_k^T(t) \quad \mathbf{0}^T \quad \dots]^T,$$

kde

$$\mathbf{f}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ m e \omega_0^2 \cos \omega_0 t \\ [(I - I_0) \gamma + m e a] \omega_0^2 \cos \omega_0 t \\ m e \omega_0^2 \sin \omega_0 t \\ -[(I - I_0) \gamma + m e a] \omega_0^2 \sin \omega_0 t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Modelování zubové vazby

Nechť jsou hřídele navzájem vázány diskrétními vazbami. Matematický model hřídele “j” soustavy lze vzhledem k (15) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{q}}_j(t) + (\mathbf{B}_j + \omega_{j0} \mathbf{G}_j) \dot{\mathbf{q}}_j(t) + \mathbf{K}_j \mathbf{q}_j(t) = \mathbf{f}_j^C + \mathbf{f}_j^E(t). \quad (16)$$

Silové působení ostatních hřídelů vázaných s hřídelem “j” prostřednictvím zubových záběrů je v (22) zobrazeno vektorem vazbových sil \mathbf{f}_j^C dimenze n_j . Případné vnější silové buzení hnací nebo zátěžnou silovou dvojicí nebo nevyvážeností kotoučů nasazených na hřídeli je vyjádřeno vektorem vnějšího buzení $\mathbf{f}_j^E(t)$. Konfigurace hřídelové soustavy v pevném globálním souřadnicovém systému je popsána vektorem $\mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_j(t)]$ výchylek uzlů hřídele

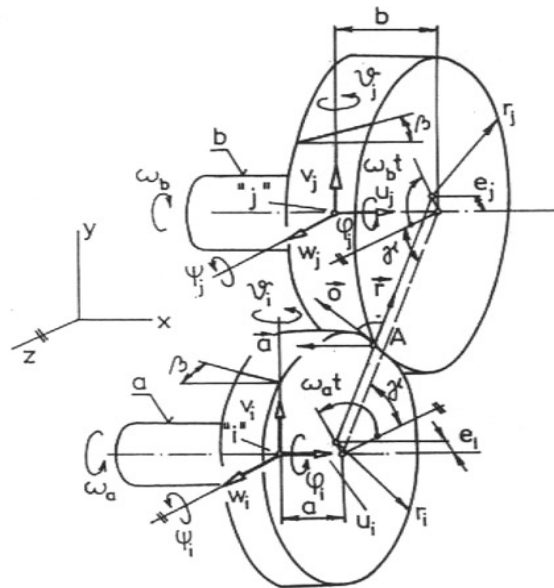
$$\mathbf{q}(t) = [\dots, u_i, v_i, \psi_i, \omega_i, \vartheta_i, \varphi_i, \dots]^T \quad (17)$$

Globální vektor linearizovaných vazbových sil $\mathbf{f}^C = [\mathbf{f}_j^C(t)]$ dimenze n vyjádříme ve tvaru

$$\mathbf{f}^C = -\frac{\partial E_p^{(C)}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial R^{(C)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\mathbf{K}_c \mathbf{q}(t) - \mathbf{B}_c \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{f}^I(t). \quad (18)$$

Pro odvození matice tuhosti \mathbf{K}_C a tlumení \mathbf{B}_C a vektoru $\mathbf{f}^I(t)$ vyjdeme nejdříve ze soustavy dvou rovnoběžných hřídelů (Obr.3) vázaných čelním soukolím se šikmými zuby. V prvním přiblížení uvažujeme bodový záběr zubů ve středu šířky ozubení v záběrovém bodě A, totožném s dotykovým bodem valivých kružnic. Přemístěním záběrového bodu A na kole nasazeném v uzlu i na hřídeli a vyvolané malými zobecněnými posuvy uzlu i a excentrickým uložením v nepohyblivém souřadnicovém systému xyz vyjádříme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a \\ d_i \end{bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i + e_i \sin \omega_a t \\ w_i - e_i \cos \omega_a t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\psi_i & \vartheta_i \\ \psi_i & 0 & -\varphi_i \\ -\vartheta_i & \varphi_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ r_i \sin \gamma + e_i \sin \omega_a t \\ -r_i \cos \gamma - e_i \cos \omega_a t \end{bmatrix}. \quad (19)$$



Obr.3 : Čelní soukolí se šikmými zuby

2.4 Problém vlastních hodnot

Rovnici (4) vyhovuje řešení

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n], \quad (20)$$

kde \mathbf{v} je zatím neznámý vektor amplitud a Ω úhlová frekvence. Dosazením $\mathbf{q}(t)$ do pohybové rovnice dostaneme

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Tato rovnice představuje problém vlastních hodnot, jejichž netriviální řešení, kdy alespoň jedna souřadnice vektoru \mathbf{v} je nenulová, existuje jen tehdy, když je determinant matice

$\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}$ je roven nule, tj. pro

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (22)$$

Kořeny $\lambda_v = \Omega_v^2$ charakteristické rovnice nazýváme vlastní čísla. Každému vlastnímu číslu λ_v je přiřazen vlastní vektor \mathbf{v}_v , který popisuje vlastní tvar kmitání.

Důležitou vlastností vlastních vektorů je ortonormalita. Podmínky ortonormality jsou vyjádřeny ve tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \quad (23)$$

kde $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_v]$ je modální matice sestavená z vlastních vektorů $\mathbf{v}_v = [v_{i,v}]$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_v)$ je diagonální spektrální matice a \mathbf{E} je jednotková matice.

3. Příklady výpočtu v Matlabu

Shora uvedená teorie byla aplikována na modelovém příkladu, kdy byl vymodelován dva shodné hřídele o délce 200mm a průměru 25mm, na kterém je pevně nasazen tuhý kotouč o průměru 100mm a tloušťce 20mm. V souladu s kapitolou 2.2 byl pomocí 21 uzlů rozdělen na 20 stejných dílů. K sestavení matic hmotnosti a tuhosti byl v Matlabu vytvořen následující cyklus

```

M1=zeros(120,120); %M1 ... matice hmotnosti rotoru bez prispevku kotoce
for N=0:6:108
    for i=1:12
        for j=1:12
            w=ME(i,j)+M1(i+N,j+N); % ME ... matice hmotnosti hrideloveho prvku
            M1(i+N,j+N)=w; % M1 ... matice hmotnosti rotoru bez prispevku kotoce
        end
    end
end
M2=zeros(120,120);N=0;i=0;j=0; % M2 ... matice hmotnosti prispevku kotocu
for N=54:6:60
    for i=1:6
        for j=1:6
            w=Mk(i,j)+M2(i+N,j+N); % Mk ... matice hmotnosti prispevku kotouce
            M2(i+N,j+N)=w;
        end
    end
end
M=M1+M2; % M ... matice hmotnosti rotoru
K=zeros(120,120);N=0;i=0;j=0;
for N=0:6:108
    for i=1:12
        for j=1:12
            w=KE(i,j)+K(i+N,j+N); % K ... matice tuhosti rotoru
            K(i+N,j+N)=w;
        end
    end
end
end

```

Po vytvoření matematického modelu rotoru následuje výpočet modálních vlastností

```

[V,D]=eig(K,M); % V ... modalni matice, skladajici se z vlastnich vektoru
                % D ... diagonalni matice, skladajici se z vlastnich cisel

```

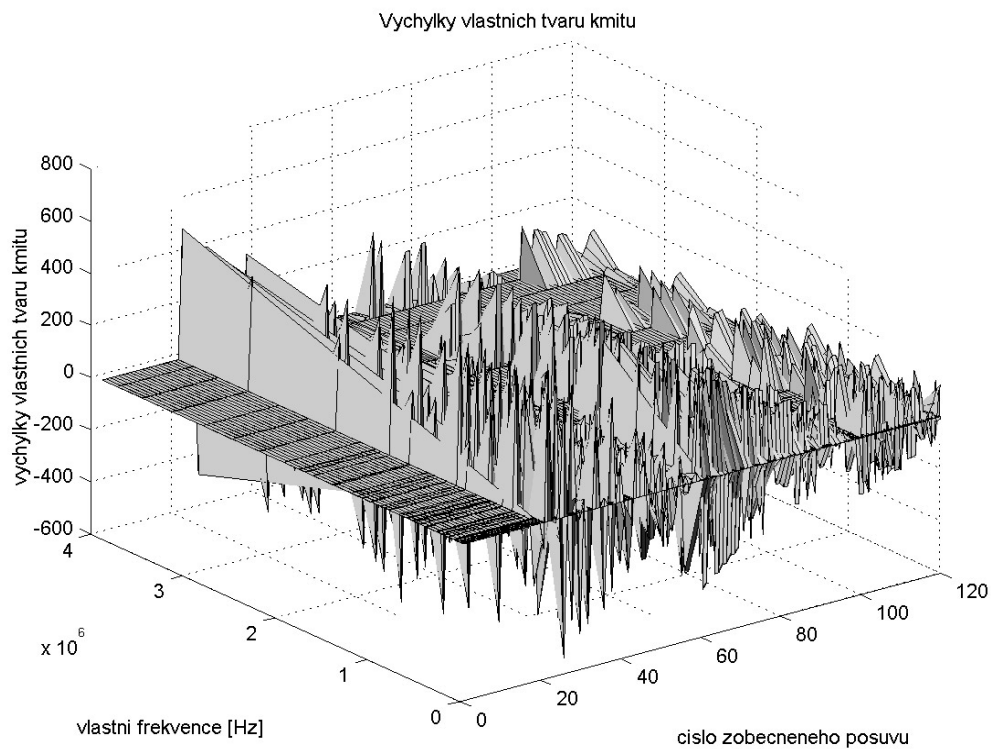
Aby byla splněna podmínka ortonormality (21), je třeba provést Choleského rozklad pomocí procedury chol

```

R=chol((transpose(V))*M*V);VV=V*inv(R);

```

Pro vizualizaci výsledků jsem použil příkazu mesh



Literatura

- [1] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V. : Základy dynamiky strojů. ČVUT, Praha 1997
- [2] Zeman, V., Kovář, L. : Modelování dynamických vlastností hřídelových a rotorových soustav. Inženýrská mechanika, roč. 6, 1999
- [3] Miláček, S. : Vyšší dynamika. ČVUT, Praha 1996

Ing. Karel Jiříčka, ČVUT, fakulta strojní, 220/1 Odbor automobilů, spalovacích motorů a kolejových vozidel, Technická 4, Praha 6, 16607
 Tel:++420224352496, e-mail:k.jiricka@seznam.cz