

ROLE OBÁLEK 2D FFT SPEKTRA PŘI TSR INVARIANTNÍM ROZPOZNÁVÁNÍ OBRAZU

Kateřina Nováková¹, Jaromír Kukul²

¹ ČVUT Praha, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

² VŠCHT Praha, Ústav počítačové a řídicí techniky

Abstrakt: Vlastnosti 2D Fourierovy transformace umožňují konstrukci charakteristik 2D binárního obrazu, které jsou invariantní vůči posunu, otočení a změně měřítka. Metoda je založena na analýze absolutní hodnoty fourierovského obrazu a konstrukci dolní a horní obálky rotovaných řezů. Diskrétní aproximace navržených invariant je realizována v prostředí Matlabu s využitím 2D FFT. Vlastnosti navržené metody jsou demonstrovány na příkladech.

Klíčová slova: 2D FFT, binární obraz, obálka, spektrum, Matlab.

1 Úvod

Naším cílem je nalézt charakteristiky 2D binárního obrazu, které by byly invariantní vůči posunu, otočení a změně měřítka. Na základě analýzy amplitudového spektra Fourierovy transformace jsou sestaveny spektrální řezy, s jejichž pomocí vytvoříme dolní a horní obálku. Po vytvoření relativizovaných obálek pomocí referenčního bodu se obálky transformacemi obrazu nemění. Z relativizovaných obálek nalezneme diskrétní aproximace invariant pomocí 2D FFT.

2 Fourierova transformace

Prostor \mathcal{W}_2

Definujeme prostor \mathcal{W}_2 jako

$$\mathcal{W}_2 = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy < +\infty\}. \quad (1)$$

Fourierova transformace

Nechť $f \in \mathcal{W}_2$, $x, y, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$. Pak Fourierovou transformací funkce f nazýváme

$$\mathcal{F}_2\{f(x, y)\} = F(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega_1 x - i\omega_2 y} dx dy. \quad (2)$$

Prostor \mathcal{D}_2

Definujeme prostor \mathcal{D}_2 jako

$$\mathcal{D}_2 = \{f : \{0, \dots, N-1\}^2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\infty\}\}. \quad (3)$$

Diskrétní Fourierova transformace

Nechť $f \in \mathcal{D}_2$ je ohraničená diskrétní funkce reprezentovaná maticí reálných čísel o velikosti $N \times N$, jejíž složky označíme $f(j, k)$ ($0 \leq j \leq N-1, 0 \leq k \leq N-1$), $0 \leq \omega_1 \leq N-1, 0 \leq \omega_2 \leq N-1$. Pak diskrétní Fourierovou transformací funkce f nazýváme

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(j, k) e^{-\frac{2\pi i}{N}(\omega_1 j + \omega_2 k)}, \quad (4)$$

kde $F \in \mathcal{D}_2$ je periodická funkce s periodou 2π reprezentovaná maticí komplexních čísel o velikosti $N \times N$.

Spektrum

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ (resp. \mathcal{D}_2) je funkce s Fourierovým obrazem $F(\omega_1, \omega_2)$. Pak spektrem nazýváme

$$F(\omega_1, \omega_2) = \operatorname{Re}(\omega_1, \omega_2) + i \operatorname{Im}(\omega_1, \omega_2), \quad (5)$$

kde $\operatorname{Re}(\omega_1, \omega_2)$ je reálná a $\operatorname{Im}(\omega_1, \omega_2)$ je imaginární část spektra.

Amplitudové spektrum

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ (resp. \mathcal{D}_2) je funkce s Fourierovým obrazem $F(\omega_1, \omega_2)$. Pak amplitudovým spektrem nazýváme

$$A(\omega_1, \omega_2) = |F(\omega_1, \omega_2)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega_1, \omega_2) + \operatorname{Im}^2(\omega_1, \omega_2)}. \quad (6)$$

Fázové spektrum

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ (resp. \mathcal{D}_2) je funkce s Fourierovým obrazem $F(\omega_1, \omega_2)$. Pak fázovým spektrem nazýváme

$$H(\omega_1, \omega_2) = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(\omega_1, \omega_2)}{\operatorname{Re}(\omega_1, \omega_2)} \right]. \quad (7)$$

3 TSR invariance

3.1 Invariance vůči posunutí

Při posunutí funkce $f(x, y)$ v prostorové oblasti dojde k lineárnímu posunutí fáze Fourierovy transformace $F(\omega_1, \omega_2)$ ve frekvenční oblasti a naopak. Amplituda zůstává beze změny (obr. 4). To vede k myšlence využít amplitudové spektrum při rozpoznávání obrazu.

Polohově invariantní spektrum

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ je funkce s Fourierovým obrazem $F(\omega_1, \omega_2)$. Pak polohově invariantním spektrem nazýváme

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{A(\omega_1, \omega_2)}{A(0, 0)}. \quad (8)$$

3.2 Invariance vůči rotaci

Při rotaci funkce $f(x, y)$ o úhel ψ v prostorové oblasti dochází k rotaci Fourierovy transformace $F(\omega_1, \omega_2)$ o stejný úhel a ve stejném směru ve frekvenční oblasti a naopak (obr. 5). Pro zajištění invariance vůči rotaci je vhodné přejít k polárním souřadnicím ω a φ . Zobrazíme-li vrstevnicovou mapu polohově invariantního spektra, můžeme pro různé úhly φ sledovat změnu hodnot amplitudy se vzrůstající vzdáleností od počátku. Tuto změnu vystihují tzv. spektrální řezy.

Spektrální řez

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ je funkce s polohově invariantním spektrem $\Phi(\omega_1, \omega_2)$. Pak spektrálním řezem spektra $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ nazýváme

$$\operatorname{cut}(\omega, \varphi) = \Phi(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi). \quad (9)$$

Horní obálka

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$. Pak horní obálkou polohově invariantního spektra nazýváme

$$\operatorname{upper}(\omega) = \max_{|\varphi| \leq \pi} \operatorname{cut}(\omega, \varphi). \quad (10)$$

Dolní obálka

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$. Pak dolní obálkou polohově invariantního spektra nazýváme

$$\operatorname{lower}(\omega) = \min_{|\varphi| \leq \pi} \operatorname{cut}(\omega, \varphi). \quad (11)$$

Dojde-li k rotaci obrazu o úhel ψ , dojde k rotaci spektra o stejný úhel. Spektrální řez odpovídající úhlu φ bude po posunutí odpovídat úhlu $\varphi + \psi$. Vzhledem k tomu, že dolní a horní obálka je tvořena ze všech úhlů v intervalu $\pi \leq \varphi \leq \pi$, jejich tvar se otočením obrazu nezmění (obr. 7 a 8).

3.3 Invariance vůči změně velikosti

Při zvětšování funkce $f(x, y)$ v prostorové oblasti dochází ke zhuštění a změně měřítka Fourierovy transformace $F(\omega_1, \omega_2)$ ve frekvenční oblasti a naopak (obr. 6). Se změnou měřítka Fourierovy transformace dochází ke stejné změně měřítka také u dolní a horní obálky (obr. 9). Pro možnost porovnání obálek stejných objektů, které byly zvětšeny nebo zmenšeny, potřebujeme určit nějaký referenční bod.

Prostor \mathcal{O}

Definujeme prostor \mathcal{O} jako

$$\mathcal{O} = \{p : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+\}. \quad (12)$$

Příklad: $\text{lower}, \text{upper} \in \mathcal{O}$, protože pro každé $\omega \geq 0$ platí $\text{lower}(\omega) \geq 0$, $\text{upper}(\omega) \geq 0$.

Prostor \mathcal{V}

Definujeme prostor \mathcal{V} jako

$$\mathcal{V} = \{u : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}_0^+\}. \quad (13)$$

Příklad: $\omega^* = u(\text{lower}(\omega), \text{upper}(\omega)) = \{\min_{\omega \geq 0} \omega \mid \text{upper}(\omega) = \frac{1}{2}\}$.

Referenční bod

Nechť $\text{lower}, \text{upper} \in \mathcal{O}$, $u \in \mathcal{V}$, $\omega^* = u(\text{lower}(\omega), \text{upper}(\omega)) \geq 0$. Platí-li pro každé $a > 0$, že $u(\text{lower}(a\omega), \text{upper}(a\omega)) = a u(\text{lower}(\omega), \text{upper}(\omega))$, pak ω^* nazýváme referenčním bodem obálek $\text{lower}, \text{upper}$.

Nabízí se několik možností pro určení hodnoty referenčního bodu. Efektivita několika vybraných možností byla měřena pomocí experimentu, ze kterého lze usoudit, že nevhodnější pro určení referenčního bodu by mohl být průsečík tečny v inflexu horní nebo dolní obálky s osou x . Vzhledem k tomu, že u velmi tenkých objektů klesá horní obálka velice pozvolna, je vhodnější referenční bod ω^* určovat jako průsečík tečny v inflexu dolní obálky s osou x .

Relativizované obálky

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ je funkce s polohově invariantním spektrem $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, $\text{lower}, \text{upper} \in \mathcal{O}$ jsou obálky $\Phi(\omega_1, \omega_2)$. Nechť $\omega^* > 0$ je jejich referenční bod. Pak funkce

$$\text{upper}^*(\xi) = \text{upper}(\omega/\omega^*), \quad (14)$$

$$\text{lower}^*(\xi) = \text{lower}(\omega/\omega^*) \quad (15)$$

nazýváme relativizované obálky.

TSR invariance

Nechť $f(x, y) \in \mathcal{W}_2$ má relativizované obálky $\text{lower}^*, \text{upper}^* \in \mathcal{O}$. Nechť $g(x, y) \in \mathcal{W}_2$ vznikla posunutím, rotací a změnou měřítka funkce f . Pak g má stejné relativizované obálky jako f .

4 Invariantní charakteristiky

První klesající úsek dolní obálky

Nechť ω^+ je souřadnice prvního lokálního minima relativizované dolní obálky. Pak prvním (monotonně) klesajícím úsekem této obálky nazýváme funkci $\text{low} : \langle 0, \omega^+ \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definovanou předpisem

$$\text{low}(\omega) = \text{lower}^*(\omega), \quad \omega \in \langle 0, \omega^+ \rangle.$$

Invarianty $\kappa_1, \dots, \kappa_9$

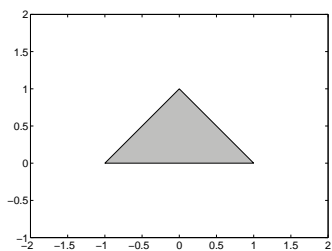
Pomocí diskretní aproximace funkce low^{-1} byly získány invarianty $\kappa_1, \dots, \kappa_9$ jako

$$\kappa_i = \text{low}^{-1}(0.1 i), \quad i = 1, \dots, 9. \quad (16)$$

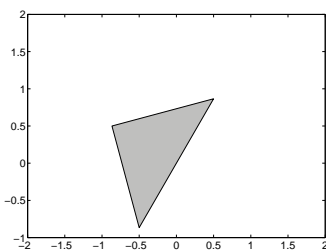
Invarianty $\kappa_{10}, \dots, \kappa_{18}$

Pomocí diskretní aproximací relativizované horní obálky byly získány invarianty $\kappa_{10}, \dots, \kappa_{18}$ jako

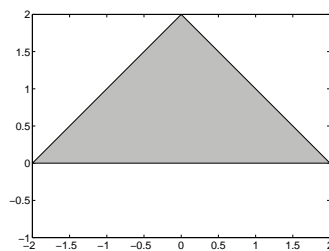
$$\kappa_i = \text{upper}^*(0.2 j), \quad i = 10, \dots, 18; \quad j = i - 9. \quad (17)$$



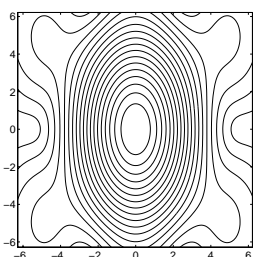
Obrázek 1: Trojúhelník



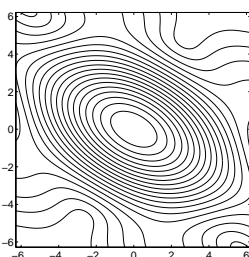
Obrázek 2: Trojúhelník otočený o 60° (OT)



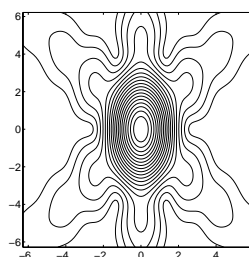
Obrázek 3: Trojúhelník zvětšený v poměru 1:2 (ZT)



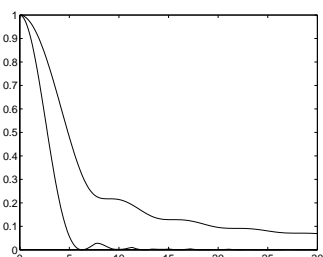
Obrázek 4: Vrstevnicová mapa trojúhelníku



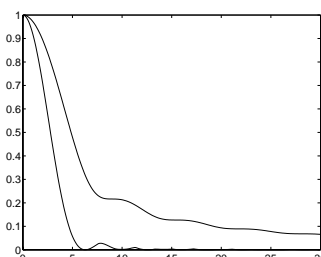
Obrázek 5: Vrstevnicová mapa OT



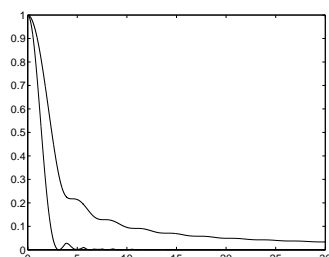
Obrázek 6: Vrstevnicová mapa ZT



Obrázek 7: Horní a dolní obálka u trojúhelníku



Obrázek 8: Horní a dolní obálka u OT



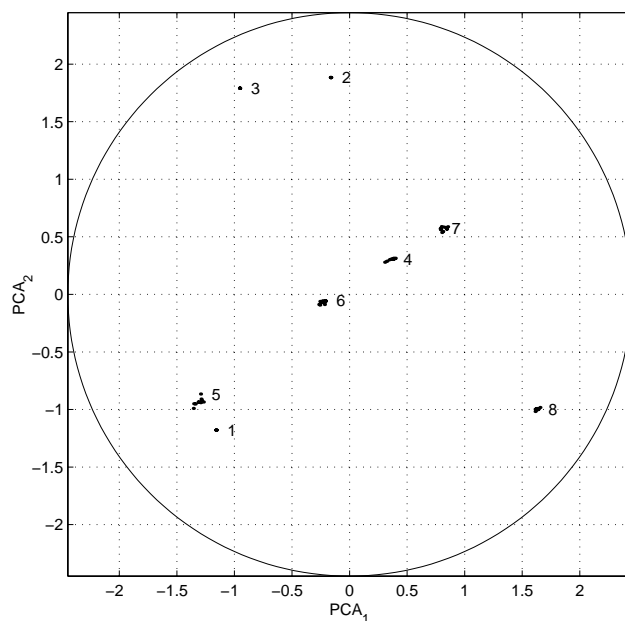
Obrázek 9: Horní a dolní obálka u ZT

5 Invariantní množina objektů

Pro experiment bylo zvoleno osm typů 2D objektů

- tři spojité: trojúhelník (1), čtverec (2), šestiúhelník (3)
- pět diskrétních: obdélník (4), kosočtverec (5), elipsa (6), průnik dvou elips (7), sjednocení dvou elips (8)

Pro každý typ objektu bylo vygenerováno deset zástupců. Každý z těchto objektů byl konvertován do vektoru $\vec{\kappa}_j = \kappa_1, \dots, \kappa_{18} \in \mathbb{R}^{18}$, $j = 1, \dots, 80$. PCA prokázala, že tyto objekty utvářejí samostatné shluky objektů stejného typu (obr. 10). Pro větší přehlednost byly tyto shluky označeny tak, že číslo vedle shluku odpovídá číslu každého z osmi typů 2D objektů. Nejmenší rozptýl mají shluky spojitých objektů (čísla 1, 2 a 3).



Obrázek 10: PCA vzorků

6 Závěr

Podařilo se nám nalézt TSR invarianty 2D binárního obrazu, které lze využít při rozpoznávání obrazu. Byly získány horní a dolní obálka polohově invariantního spektra, které jsou polohově a rotačně invariantní. Pro dosažení invariance vůči změně velikosti bylo potřeba využít referenční bod určený jako průsečík tečny v inflexu dolní obálky s osou x a vytvořit tak relativizované obálky. TSR invarianty byly získány z relativizovaných obálek. Experiment prokázal separabilitu objektů klasifikovaných pomocí navržených charakteristik.

Reference

- [1] Eric W. Weisstein. "Fourier Transform." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FourierTransform.html>
- [2] Eric W. Weisstein. "Discrete Fourier Transform." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/DiscreteFourierTransform.html>

Kontakty

Kateřina Nováková

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Trojanova 13, 120 00 Praha 2, Česká republika
E-mail: katka.novakova@dc.fjfi.cvut.cz

Jaromír Kukal

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze
Fakulta chemicko-inženýrská
Ústav počítačové a řídicí techniky
Technická 1905, 166 28 Praha 6, Česká republika
Telefon: +420-2-24354212, fax: +420-2-24355053
E-mail: jaromir.kukal@vscht.cz