

# APLIKACE DWT PRO POTLAČENÍ ŠUMU V OBRAZE

J.Švihlík

ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, Katedra radioelektroniky

## Abstrakt

Šum je v obraze prakticky vždy přítomen, což způsobuje degradaci obrazu. Existuje celá řada více či méně účinných metod sloužících k jeho potlačení. Metody lze v principu rozdělit na metody lineární a metody nelineární. Do lineárních metod (platí princip superposice) lze zahrnout zejména konvoluční filtraci v prostorové oblasti popř. kmitočtovou masku v oblasti spektrální. K nelineárním metodám patří kupř. metoda mediánového filtru apod. V dnešní době je velmi populární využívat vlnkovou transformaci, která rovněž představuje účinný nástroj pro potlačení šumu a tato její aplikace je naplní tohoto článku.

## 1 Spojitá vlnková transformace (CWT)

Spojitá vlnková transformace CWT (z angl. Continuous Wavelet Transformation), jak si lze přečíst v [1], umožňuje časově-frekvenční popis signálu a je definována vztahem,

$$\gamma(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \psi_{s, \tau}^*(t) dt \quad (1.1)$$

kde  $\psi_{s, \tau}(t)$  je tzv. mateřská vlnka (hvězdička v horním indexu označuje číslo komplexně sdružené),  $\gamma(s, \tau)$  jsou vlnkové koeficienty, pro vlnku můžeme dále psát

$$\Psi_{s, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad s, \tau \in \mathbf{R}, s \neq 0 \quad (1.2)$$

člen převrácené hodnoty odmocniny  $s$  provádí normalisaci energie při změnách měřítka,  $s$  resp.  $\tau$  je měřítko resp. časový posuv. Další podrobnosti o CWT včetně její vlastností (linearita, invariance, dilatace) lze nalézt v [2] a [3].

## 2 Diskrétní vlnková transformace (DWT)

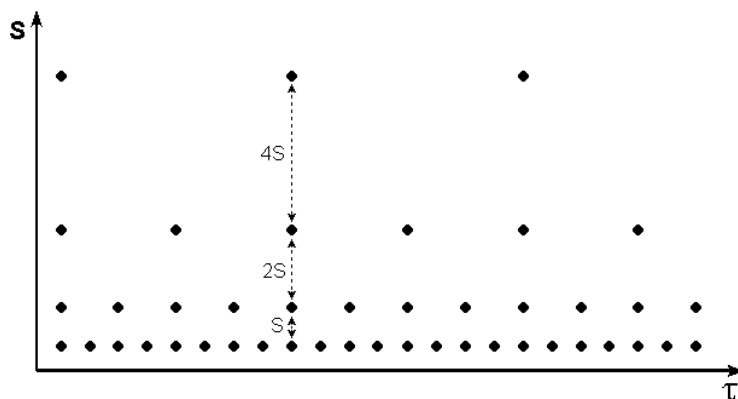
Podíváme-li se na rovnici (1.1), jež popisuje CWT, je potom jasné, že výpočet CWT je velice redundantní, jelikož vlnka je spojitě posouvána po analysovaném signálu s tím, že změna měřítka probíhá také spojitě. Výstupem transformace tedy bude nekonečný počet vlnkových koeficientů. Neredundantní dekompozici signálu zajistíme vhodnou závislostí parametrů  $s$  a  $\tau$  viz. (2.1), touto závislostí vytvoříme z vlnky orthonormální basi.

$$s = 2^p, \tau = 2^p \cdot k \quad p, k \in \mathbf{Z} \quad (2.1)$$

Vlnka pak vypadá dle (2.2).

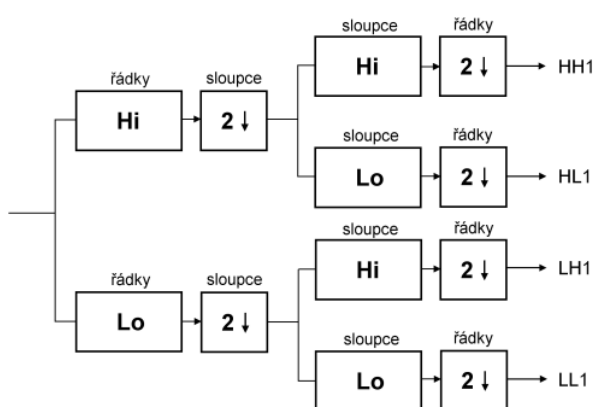
$$\Psi_{k, p}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^p}} \cdot \psi\left(\frac{t - 2^p \cdot k}{2^p}\right) \quad (2.2)$$

Tento princip se stal základem pro tzv. diskretní vlnkovou transformaci DWT (z angl. Discrete Wavelet Transformation). Tato signálová dekompozice (dyadická) bývá také někdy označována jako analýza s mnoha rozlišeními (z angl. Multiresolution Analysis Decomposition). DWT je v podstatě speciálně vzorkovaná CWT, kdy vzorkování prostoru čas-měřítko probíhá na tzv. dvojkové mřížce (dyadic grid), jež je ke shlédnutí na obr. 2.1.



Obr. 2.1 Dvojková mřížka

Na obr. 2.2 můžeme vidět základní strukturu realizující dyadickou dekompozici. Kde  $H_i$  resp.  $L_o$  představuje impulsní odezvu filtru typu horní propust resp. dolní propust a blok s označením  $2\downarrow$  provádí podvzorkování číslem 2.



Obr. 2.2 Základní struktura pro dyadickou dekompozici 2D signálu

Po provedení dyadické dekompozice signálu získáme 4 sady koeficientů : LL1 – aproximace obrázku, HL1 – detaily ve vertikálním směru, LH1 – detaily v horizontálním směru, HH1 – detaily v diagonální směru. Podrobnosti o implementaci DWT a návrhu filtrů jsou uvedeny v [3] a [4].

### 3 Princip odšumování pomocí DWT

Princip odšumování s využitím DWT je založen na vhodném prahování vlnkových koeficientů na dané dekompoziční hladině. Je zřejmé, že tyto vlnkové koeficienty vznikly aplikací DWT na zašuměný signál (signál s obsahem aditivního bílého šumu). Takovýto signál můžeme vyjádřit jako (3.1),

$$y(n) = x(n) + e(n) \quad (3.1)$$

kde  $x(n)$  představuje původní šumem nekontaminovaný signál,  $y(n)$  je signál s aditivním gaussovským šumem a  $e(n)$  je šum s rozložením hustoty pravděpodobnosti  $N(0,1)$ . Po aplikaci DWT na  $y(n)$  dostáváme  $Y_{j,k}$ . Takto získané vlnkové koeficienty prahujeme. V zásadě existují dva způsoby prahování : měkké a tvrdé. Měkké (soft) resp. tvrdé (hard) prahování je vyjádřeno vztahem (3.2) resp. (3.3).

$$\hat{X}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(Y_{j,k}) \cdot (|Y_{j,k}| - \delta), & |Y_{j,k}| \geq \delta \\ 0, & |Y_{j,k}| < \delta \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\hat{X}_{j,k} = \begin{cases} Y_{j,k}, & |Y_{j,k}| \geq \delta \\ 0, & |Y_{j,k}| < \delta \end{cases} \quad (3.3)$$

Prah, jenž je ve vztazích (3.2) a (3.3) značen coby  $\delta$ , lze určit několika způsoby, tím nejběžnějším je využít rovnice odvozené Donohem a Johnsonem (3.4),

$$\delta = \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(M \cdot N)} \quad (3.4)$$

kde  $M$  a  $N$  představují výšku a šířku obrazové matice a  $\sigma$  směrodatnou odchylku. Posledním krokem k získání odšuměného signálu je aplikace inverzní DWT na prahované koeficienty. Matematický popis a odvození různých vztahů pro prahy je ve většině případů zdouhavý a přesahuje rámec tohoto článku; lze je nalézt např. v [6] a [7].

### 4 Simulace v programovém prostředí Matlab

V Matlabu implementovaný Wavelet toolbox obsahuje mnoho užitečných funkcí vhodných pro různé druhy simulací. Pro de-noising (odšumování) zde existuje celá řada funkcí, zejména `ddencmp` a `wdencmp` viz [5] [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com). Pro osvojení algoritmu jsem vytvořil funkci `denoise` s následující syntaxí.

```
function[prah_koef,prah] = denoise(Wk,noise,hors)
```

kde `Wk` jsou vlnkové koeficienty, `noise` je matice s aditivním gaussovským šumem, `hors` je proměnná typu string a lze volit mezi měkkým 's' a tvrdým 'h' prahováním. Výstupem je hodnota prahu `prah` vypočítaného dle (3.4) a prahované koeficienty `prah_koef`.

Na obr. 4.1 a) je možné shlédnout obrázek kameramana, na obr. 4.1 b) stejný obrázek, jenž je kontaminován gaussovským šumem, dále pak na obr. 4.1 c) resp. 4.1 d) je uveden tentýž obrázek po aplikaci algoritmu na odšumování s tzv. tvrdým resp. měkkým prahováním.



a)



b)



c)



d)

Obr. 4.1 Kameraman, vlnka db2; a) originál, b) se šumem, c) prahování tvrdé, d) prahování měkké

Je dobré poznamenat, že obrázek byl třikrát dekomponován, přičemž v každém stupni dekompozice bylo provedeno prahování vlnkových koeficientů (krom pásma LL). Na obrázcích 4.1 c) a d) jsou velice dobře zřetelné artefakty vznikající při vlnkové transformaci. V tabulce 4.1 můžeme vidět hodnoty MSE (z angl. Mean Square Error - střední kvadratická chyba). MSE dobře ilustruje chyby jednotlivých pixelů, k nimž dojde vlivem zašumění.

$$MSE = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (\text{upravený}(i, k) - \text{originál}(i, k))^2 \quad (4.1)$$

$M$  resp.  $N$  je výška resp. šířka obrazové matice.

Tab. 4.1 Hodnoty MSE

<i>vlnky</i>	<i>tvrdé</i>	<i>měkké</i>	<i>šum, <math>\sigma = 20</math></i>
db2	192.5	284.9	398.7
db5	193.7	288.5	398.7
Haar	193.9	309.1	398.7
Coif4	189.2	278.9	398.7

Z tab. 4.1 vyplývá, že tvrdé prahování přináší přibližně o 35 % nižší MSE než prahování měkké. Největší střední kvadratická chyba byla při použití Haarovy vlnky, důvodem může být skutečnost, že Haarova vlnka neumožňuje hladkou dekompozici.

## 5 Závěr

Tato práce se snažila nastínit základy odšumování s využitím vlnkové transformace. Byly vyzkoušeny dva algoritmy pro odšumování; s tvrdým a měkkým prahováním. Z výsledků ve čtvrtém odstavci lze usuzovat, že vzhledem ke zjištěné střední kvadratické chybě, se lépe jeví tvrdé prahování. Práh byl určen podle vztahu (3.4) odvozeného Donohem a Johnsonem, který vychází z teorie pravděpodobnosti, neboť šum s gaussovským rozložením hustoty pravděpodobnosti si zachová své vlastnosti i po provedené dyadické dekompozici a tudíž přibližně čtyřnásobek směrodatné odchylky zahrnuje asi 99.99 % šumu, pak již stačí zvolit odpovídající hodnotu prahu a šum odstranit. Dále by bylo jistě zajímavé určit skutečnou ideální hodnotu prahu vzhledem k dosažené střední kvadratické chybě, popř. SNR (z angl. Signal to Noise Ratio).

## 6 Poděkování

Práce vznikla s přispěním grantu GAČR č.102/05/2054 „Kvalitativní aspekty zpracování audiovizuální informace v multimediálních systémech“.

## Literatura

- [1] KOLZÖW, D. *Wavelets. A Tutorial and a Bibliography* [online]. Erlangen [cit. 2005-8-8]. Dostupné na www: <<http://math.feld.cvut.cz/0educ/osndokt-c/kolzow3.pdf>>
- [2] VALENS, C. *A Really Friendly Guide to Wavelets* [online]. [cit. 2005-8-16]. Dostupné na www: <[http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/download/arfgtw\\_26022004.pdf](http://perso.wanadoo.fr/polyvalens/clemens/download/arfgtw_26022004.pdf)>
- [3] ŠMÍD, R. *Úvod do vlnkové transformace* [online]. ČVUT v Praze, Fakulta elektrotechnická, Katedra měření, [cit. 2005-6-20]. Dostupné na www: <<http://measure.feld.cvut.cz/usr/staff/smid/wavelets/wavelet-intro-html.html>>
- [4] SCHOVANEC, R. *Přehled moderních metod komprese obrazu*. Praha: ČVUT. Fakulta elektrotechnická. Katedra radioelektroniky, 2004. Vedoucí semestrálního projektu Mgr. Petr Páta Ph.D
- [5] <<http://www.mathworks.com>>
- [6] *Wavelet Transform and Denoising* [online]. [cit. 2005-8-29]. Dostupné na www: <<http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-12062002-152858/unrestricted/Chapter4.pdf>>
- [7] ADAMS, N., et al. *Denoising Using Wavelet* [online]. [cit. 2005-10-7]. Dostupné na www: <<http://www-personal.engin.umich.edu/~volafss/Wavelet-Project/rep/DN.ps>>

---

Jan Švihlík  
ČVUT v Praze  
Fakulta elektrotechnická  
Katedra radioelektroniky  
Technická 2  
166 27 Praha 6 - Dejvice  
svihlj1@fel.cvut.cz