

SIMULAČNÍ MODEL ASYNCHRONNÍHO STROJE

E. Thöndel, Ing.

Katedra mechaniky a materiálů, FEL ČVUT v Praze

Abstrakt

Asynchronní motor je pro svou jednoduchost a nízkou cenu nejčastěji používaný typ elektromotoru, může však pracovat i jako generátor elektrické energie. V následujících odstavcích bude odvozen simulační model asynchronního stroje, včetně jeho implementace v prostředí MATLAB-SIMULINK. Tento model je vytvářen v rámci disertační práce, která se zabývá modelováním a řízením kogeneračních jednotek, kde asynchronní stroj bude sloužit jako generátor elektrické energie.

1 Matematický model motoru

Matematický model je odvozen za následujících předpokladů:

- Napájecí soustava je trojfázová, souměrná, napětí jsou harmonická.
- Vinutí jednotlivých fází jsou sinusově rozložena v drážkách statoru.
- Odporů a indukčností jednotlivých fází jsou shodné.
- Magnetizační charakteristika je lineární.
- Ztráty v železe se zanedbávají.

Pro zápis soustavy rovnic lze použít buď maticové formy nebo zápisu pomocí prostorových vektorů. Pro implementaci je výhodnější maticový zápis, pro názornost zápis vektorový, který budeme dále používat.

1.1 Základní rovnice asynchronního stroje

Asynchronní stroj (AS) je konstrukčně tvořen dvěma trojfázovými systémy vinutí vázanými vzájemnou magnetickou vazbou. Vzájemná indukčnost vinutí statoru a rotoru se s časem mění díky otáčení rotoru vůči statoru. Můžeme tedy napsat celkem šest základních rovnic pro jednotlivé obvody (fáze). Pro další úvahy se omezíme nejprve na stojící asynchronní stroj s uvažováním všech uvedených omezujících předpokladů. Následující odvození základních rovnic AS je možné též najít např. v [1] nebo v [2].

Pro výsledný spřažený magnetický tok jedné fáze statorového vinutí v základní poloze můžeme napsat:

$$\Psi_a = L_a i_a + M_s i_b \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + M_s i_c \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + M i_A + M i_B \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + M i_C \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right), \quad (1)$$

kde je:

L_a vlastní indukčnost fáze statorového vinutí,

M_s vzájemná indukčnost dvou fází statorového vinutí,

M vzájemná indukčnost odpovídajících si fází statorového a rotorového vinutí.

Předpokládáme, že vinutí nemá vyvedený společný uzel, tedy platí $i_b + i_c = -i_a$ a zároveň pro rotor $i_B + i_C = -i_A$. Dále platí $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$. Po dosazení do rovnice 1 dostaneme výsledný vztah:

$$\Psi_a = (L_a + \frac{1}{2}M_s)i_a + \frac{3}{2}Mi_A. \quad (2)$$

V předchozí rovnici můžeme označit výslednou indukčnost jedné fáze statorového vinutí:

$$L_s = (L_a + \frac{1}{2}M_s) \quad (3)$$

a vzájemnou indukčnost statoru a rotoru:

$$L_{sh} = \frac{3}{2}M. \quad (4)$$

Napěťová rovnice jedné fáze statorového vinutí má tvar:

$$u_a = R_s i_a + \frac{d\Psi_a}{dt}. \quad (5)$$

Stejnou úvahu lze provést i pro všechny ostatní fáze statorového a rotorového vinutí a sestavit tak všech šest základních rovnic AS.

1.2 Transformace souřadnic

Vzájemná indukčnost vinutí statoru a rotoru se s časem mění díky otačení rotoru vůči statoru. Při analýze AS se používá transformace do dvou ortogonálních os otáčejících se vhodně zvolenou rychlostí. Díky transformaci se sníží počet fází systému a za určitých okolností přejdou střídavé veličiny na stejnosměrné. Uvedenou transformaci si nejprve vysvětlíme na transformaci do soustavy pevně svázanou se státorem, která bývá v literatuře označována jako transformace $\alpha\beta$ nebo Clarkova.

V trojfázových soustavách se často setkáváme s fázovým posunem $\frac{2}{3}\pi$. Pro zjednodušení zápisu fázorů a prostorových vektorů proto zavádíme pomocné komplexní číslo ([3])

$$a = e^{j\frac{2}{3}\pi}. \quad (6)$$

Pro práci s tímto komplexním číslem platí následující algebra:

$$\begin{aligned} a \cdot a^2 &= 1, \\ a \cdot a &= a^2, \\ a^2 \cdot a^2 &= a, \\ 1 + a + a^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Průběh okamžitých hodnot proudů jednotlivých fází statoru můžeme nahradit jediným prostorovým vektorem, definovaným

$$\hat{I}_s^s = K(i_a + i_b a + i_c a^2). \quad (8)$$

Dolní index značí, že se jedná o proud statoru a horní index značí, že pracujeme v souřadnicích pevně svázaných se státorem. Prostorové vektory budeme dále značit se stříškou. Dosadíme-li do vztahu 8 okamžitě hodnoty fázových proudů, které předpokládáme harmonické s amplitudou I_m a vzájemným fázovým posunem $\frac{2}{3}\pi$, dostaneme s respektováním vztahů 7 pro komplexní číslo a výraz pro prostorový vektor statorového proudu:

$$\hat{I}_s^s = \frac{3}{2}K I_m e^{j\omega t}. \quad (9)$$

Z tohoto vztahu již snadno získáme složky statorového proudu v pravoúhlých souřadnicích pevně svázaných se statorem:

$$\begin{aligned} i_\alpha &= \operatorname{Re}(\widehat{I}_s^s), \\ i_\beta &= \operatorname{Im}(\widehat{I}_s^s). \end{aligned} \quad (10)$$

Při volbě koeficientu $K = \sqrt{\frac{2}{3}}$ platí invariantnost výkonů. Při volbě koeficientu $K = 1$ má transformovaný vektor velikost danou fyzikální skutečností. Třetí používaná volba je $K = \frac{2}{3}$. V tomto případě není nutný přepočítací koeficient mezi fázovým proudem i_α a transformovaným proudem i_α

Pokud stejný postup aplikujeme v odvozených rovnicích AS, obdržíme tak vztahy pro prostorové vektory statoru a rotoru:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_s^s &= R_s \widehat{I}_s^s + \frac{d\widehat{\Psi}_s^s}{dt}, \\ \widehat{U}_r^r &= R_r \widehat{I}_r^r + \frac{d\widehat{\Psi}_r^r}{dt}. \end{aligned} \quad (11)$$

Až doposud jsme předpokládali, že se rotor nepohybuje. Otáčí-li se rotor vůči statoru úhlovou rychlostí ω , mění se vzájemná indukčnost statorového a rotorového vinutí. Sprážené magnetické toky můžeme vyjádřit ve formě prostorových vektorů:

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_s^s &= L_s \widehat{I}_s^s + L_{sh} \widehat{I}_r^r e^{j\omega t}, \\ \widehat{\Psi}_r^r &= L_r \widehat{I}_r^r + L_{rh} \widehat{I}_s^s e^{-j\omega t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Rovnice 11 a 12 tvoří základní rovnice AS, které budeme dále implementovat v programovém prostředí MATLAB.

Rovnice AS je možné obecně transformovat do libovolného ortogonálního systému rotujícího obecnou rychlostí ω_k . Rovnice AS pak získají podobu:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_s^k &= R_s \widehat{I}_s^k + \frac{d\widehat{\Psi}_s^k}{dt} + j\omega_k \widehat{\Psi}_s^k, \\ \widehat{U}_r^k &= R_r \widehat{I}_r^k + \frac{d\widehat{\Psi}_r^k}{dt} + j(\omega_k - \omega) \widehat{\Psi}_s^k. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_s^k &= L_s \widehat{I}_s^k + L_{sh} \widehat{I}_r^k, \\ \widehat{\Psi}_r^k &= L_r \widehat{I}_r^k + L_{rh} \widehat{I}_s^k. \end{aligned} \quad (14)$$

Odvození je možné najít např. v [2]. U AS se v praxi používají tyto tři systémy:

- $\omega_k = 0$: Transformace do souřadnic pevně svázaných se statorem (Clarkova nebo též $\alpha\beta$). Tato transformace je vhodná pro sledování statorových veličin.
- $\omega_k = \omega_s$: Transformace do souřadnic rotujících synchronní rychlostí (dq). Tato transformace je vhodná pro sledování regulačních dějů.
- $\omega_k = \omega$: Transformace do souřadnic svázaných s rotorem (Parkova nebo též kl). Tato transformace je vhodná pro sledování rotorových veličin.

Volba systému ve kterém budeme rovnice modelovat může značně ovlivnit rychlost a přesnost simulace. Podle [4] platí následující doporučení:

- Použijte systém pevně svázaný se státorem, pokud je napětí na statoru nesymetrické nebo nespojité a napětí na rotoru je symetrické nebo nulové (motor s kotvou na krátko).
- Použijte systém pevně svázaný s rotorem, pokud je napětí na rotoru nesymetrické nebo nespojité a napětí na statoru je symetrické.
- Použijte systém pevně svázaný se státorem nebo rotující synchronní rychlostí, pokud jsou napětí na statoru i rotoru symetrická a spojitá.

Vzhledem k omezení, které jsme definovali v úvodu, je nevhodnější systém pro modelování rovnic AS systém rotující synchronní rychlostí. Tato transformace má další výhodu v tom, že střídavé veličiny ve statoru přejdou na veličiny stejnosměrné.

1.3 Náhradní schéma

Při modelování rovnic AS se vychází ze známého náhradního schématu. To vznikne pokud přepočteme rotorové veličiny na statorovou stranu. Transformační koeficient vychází z požadavku převodu rotorových parametrů na stejný počet závitů, fází a prostorové uspořádání jako má stator při zachování energetických poměrů [5]. Tento přepočet vychází:

$$\begin{aligned} U' &= U \cdot \frac{m_r N_r k_{vr}}{m_s N_s k_{vs}}, \\ I' &= I \cdot \frac{N_s k_{vs}}{N_r k_{vr}}, \\ R' &= R \cdot \frac{m_s}{m_r} \left(\frac{N_r k_{vr}}{N_s k_{vs}} \right)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

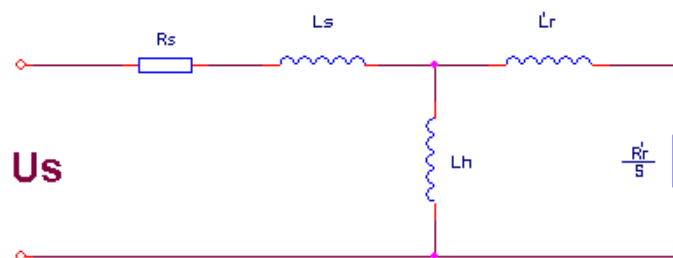
kde

N_s, N_r je počet závitů statoru a rotoru,

m_s, m_r je počet fází statoru a rotoru,

k_{vs}, k_{vr} je činitel vinutí statoru a rotoru.

Základní rovnice AS v souřadnicích pevně svázaných se státorem 13 a 14 ($\omega_k = 0$) můžeme po zavedení skluzu impedančně spojit do jednoho náhradního schématu (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Náhradní schéma AS.

1.4 Energetická bilance

Činný výkon odebíraný ze zdroje, resp. dodávaný do zdroje (za předpokladu, že AS pracuje jako generátor) lze vyjádřit obecným vztahem.

$$P = A \cdot \text{Re}(\widehat{U}_s \widehat{I}_s^*). \quad (16)$$

Podle [6] se z výkonu předávaného přes vzduchovou mezeru přemění s -tá část v Joulovy ztráty a $(1-s)$ -tá část v mechanický výkon. Platí:

$$\begin{aligned} M \cdot \omega &= (1 - s)P_\delta, \\ \Delta P_j &= s \cdot P_\delta. \end{aligned} \quad (17)$$

Dosažením do vztahu 16 a za použití výrazu 17 je možné vyjádřit mechanický moment jako vektorový součin různých kombinací statorových a rotorových veličin a to nezávisle na volbě souřadného systému. Odvození je možné najít např. v [2]. Jednotlivé kombinace jsou uvedeny v tabulce 1.

Varianta	1	2	3	4	5	6	7	8
1.Proměnná	\widehat{I}_s	\widehat{I}_s	\widehat{I}_s	\widehat{I}_s	\widehat{I}_r	\widehat{I}_r	\widehat{I}_r	$\widehat{\Psi}_s$
2.Proměnná	\widehat{I}_r	$\widehat{\Psi}_s$	$\widehat{\Psi}_h$	$\widehat{\Psi}_r$	$\widehat{\Psi}_s$	$\widehat{\Psi}_h$	$\widehat{\Psi}_r$	$\widehat{\Psi}_r$
Vztah násoben	L_h	-	-	$\frac{L_h}{L_r}$	$\frac{L_h}{L_s}$	-	-	$\frac{L_h}{\sigma L_s L_r}$

Tabulka 1: Vztahy pro výpočet elektromagnetického momentu.

Konstanta A je závislá na použité konstantě K při transformaci statorových a rotorových veličin. Při volbě $K = \frac{2}{3}$ platí $A = \frac{3}{2}$ a výsledný elektromagnetický moment můžeme vyjádřit např.:

$$M = \frac{3}{2}p(\Psi_\alpha i_\beta - \Psi_\beta i_\alpha). \quad (18)$$

2 Identifikace parametrů

Identifikací parametrů AS rozumíme nalezení hodnot jednotlivých pasivních součástek v náhradním schématu.

Klasické metody vychází z kruhového diagramu. Kruhový diagram ukazuje průběhy proudu, momentu, výkonu, ztrát a skluzu ve všech provozních stavech AS. Je to geometrické místo konců fázoru proudu statoru při plynulé změně skluzu. K sestavení kruhového diagramu se využívá hodnot proudu, příkonu a účinníku naměřených při chodu naprázdno a při chodu nakrátko, tj. při zabrzděném rotoru, a naměřené hodnoty odporu statorového vinutí.

Vedle těchto klasických metod je možné použít některou z dynamických metod identifikace systému. Tyto metody vychází z měření dalších charakteristik, jako je např. přechodová či impulsová charakteristika. Tyto metody je možné najít např. v [7].

Následující simulace budou prováděny s parametry AS získanými z [5]. Jedná se o stroj *F160MD4 – 08L* z konstrukční řady firmy ČKD-Trakce. Parametry jsou uvedeny v tabulce 2.

Typ	Výkon	Napětí	Proud	Spoj.	Otáčky	Frekv.	$\cos \varphi$	Účinn.	R_s	R'_r	X_h	X_s	X'_r
-	$P[kW]$	$U[V]$	$I[A]$	-	$n[\text{min}^{-1}]$	$f[Hz]$	-	$\eta[\%]$	$[m\Omega]$	$[m\Omega]$	$[\Omega]$	$[\Omega]$	$[\Omega]$
F160MD4-08L	11	380	22	Δ	1445	50	0.83	90.4	838	1264	73.4	3.05	3.01

Tabulka 2: Základní parametry AS.

3 Implementace modelu

3.1 Maticový tvar rovnic AS

Odvozené rovnice 13 a 14 nejsou vhodné pro přímou implementaci na počítači. Důvodem je omezená podpora práce s komplexními čísly. Z tohoto důvodu je vhodné tyto rovnice nejprve vyjádřit v maticové podobě.

Základní rovnice 11 a 12 AS lze přepsat do maticové podoby:

$$\begin{aligned} \vec{U}_s^s &= R_s \vec{I}_s^s + \frac{d\vec{\Psi}_s^s}{dt}, \\ \vec{U}_r^r &= R_r \vec{I}_r^r + \frac{d\vec{\Psi}_r^r}{dt}, \\ \vec{\Psi}_s^s &= L_s \vec{I}_s^s + L_{sh} T(\vartheta) \vec{I}_r^r, \end{aligned}$$

$$\vec{\Psi}_r^i = L_r \vec{I}_r^i + L_{rh} T^{-1}(\vartheta) \vec{I}_s^i, \quad (19)$$

kde $T(\vartheta)$ je transformační matice ze systému rotujícího rychlostí ω ($\vartheta = \omega t$) do stojícího systému. Její tvar je možné zapsat ve tvaru:

$$T(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Jelikož se jedná o ortogonální matici, platí též $T^{-1}(\vartheta) = T^T(\vartheta)$ [8]. Dále je možné tyto rovnice opět transformovat do obecně rotujícího systému. Rovnice pro rotor převedeme nejprve ze systému rotoru do absolutně stojícího systému statoru, pak do obecně rotujícího systému. Za předpokladu, že platí:

$$T(\vartheta) \frac{dT^{-1}(\vartheta)}{d\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J \quad (21)$$

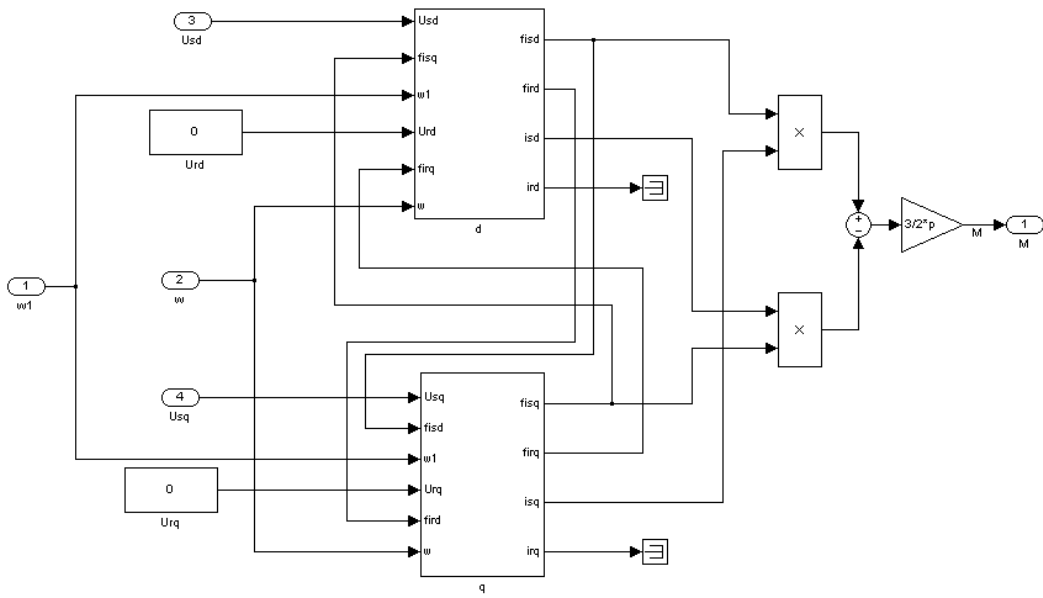
a dále s použitím pravidla o derivování složené funkce dostáváme:

$$\begin{aligned} \vec{U}_s^k &= R_s \vec{I}_s^k + \frac{d\vec{\Psi}_s^k}{dt} + J\omega_k \vec{\Psi}_s^k, \\ \vec{U}_r^k &= R_r \vec{I}_r^k + \frac{d\vec{\Psi}_r^k}{dt} + J(\omega_k - \omega) \vec{\Psi}_r^k, \\ \vec{\Psi}_s^k &= L_s \vec{I}_s^k + L_{sh} \vec{I}_r^k, \\ \vec{\Psi}_r^k &= L_r \vec{I}_r^k + L_{rh} \vec{I}_s^k. \end{aligned} \quad (22)$$

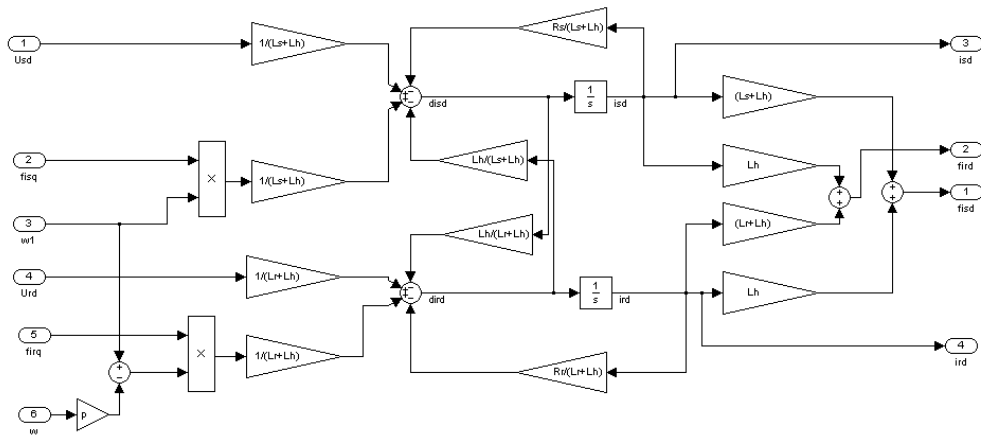
Takto upravené rovnice lze již přímo implementovat v prostředí MATLAB-SIMULINK. Vidíme také, že převedení do maticové podoby je možné prostou symbolickou záměnou komplexního čísla j transformační maticí J .

3.2 Simulinkové schéma

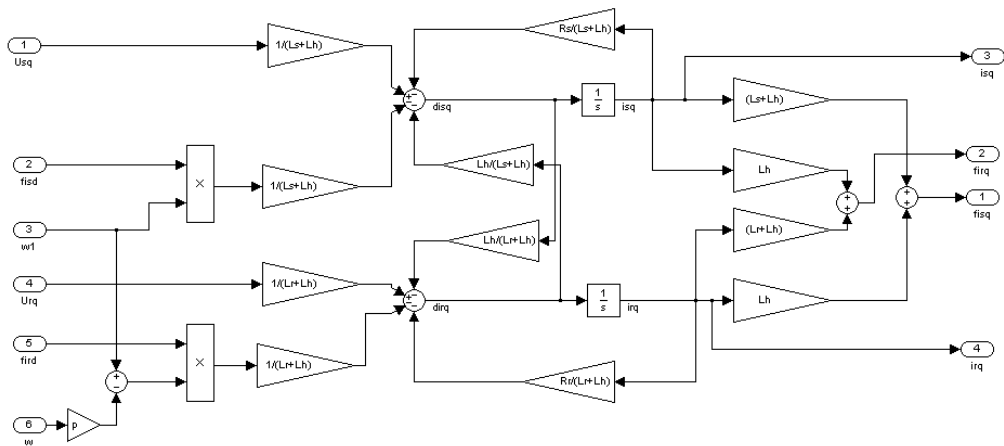
Jak již bylo uvedeno v odstavci o transformaci veličin, je nejvhodnější systém pro modelování ten, který rotuje synchronní rychlostí ω_s ($\omega_k = \omega_s$). V tomto systému přejdou střídavé statorové veličiny na veličiny stejnosměrné. Vlastní implementace v prostředí MATLAB-SIMULINK je na obrázcích 2, 3 a 4.



Obrázek 2: Simulinkové schéma AS.



Obrázek 3: Simulinkové schéma AS - osa d .



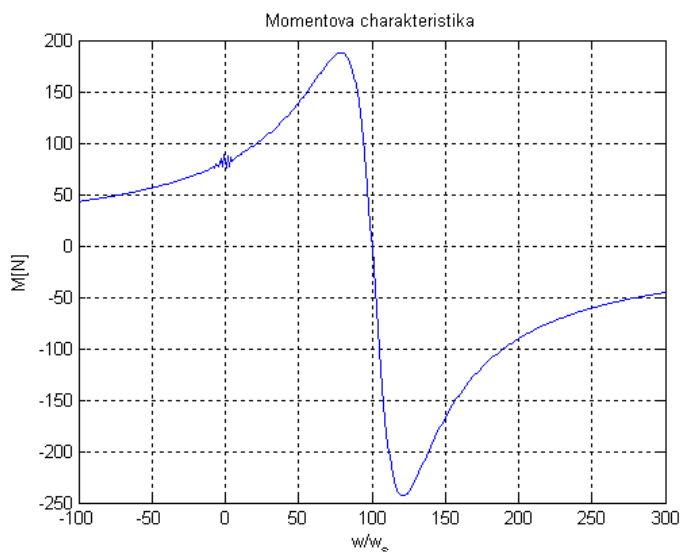
Obrázek 4: Simulinkové schéma AS - osa q .

3.3 Výsledky simulací

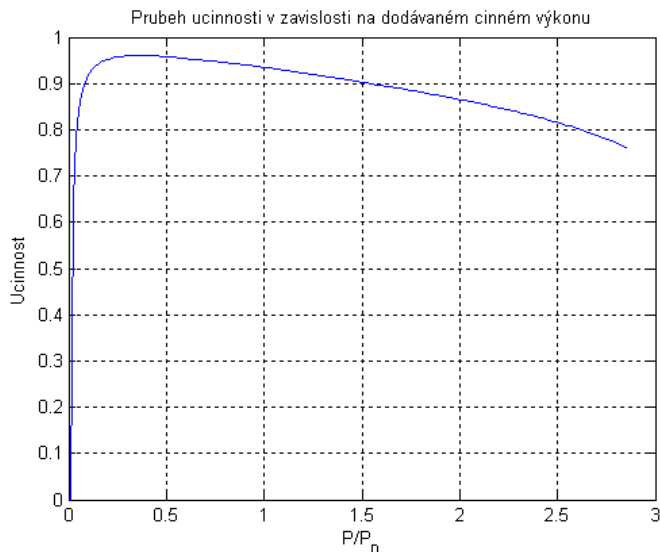
Na obrázku 5 je zobrazena momentová charakteristika AS ve všech třech provozních stavech AS. V oblasti pro $\frac{\omega}{\omega_s} \cdot 100 \in (-100, 0)$ pracuje AS jako asynchronní brzda. Rotor je poháněn mechanickým momentem proti smyslu otáčení točivého magnetického pole. V oblasti pro $\frac{\omega}{\omega_s} \cdot 100 \in (0, 100)$ pracuje AS jako motor. Přiváděná elektrická energie se přeměňuje v mechanickou. V poslední oblasti pro $\frac{\omega}{\omega_s} \cdot 100 \in (100, 300)$ pracuje AS jako generátor. Přiváděná mechanická energie se mění na energii elektrickou. Odvozený model lze tedy využít pro simulace chování AS ve všech jeho provozních stavech.

Obrázek 6 ukazuje závislost účinnosti na dodávaném činném výkonu. V bodě, kdy motor odeberá ze sítě jmenovitý výkon, je účinnost o málo větší než je štítkový údaj (viz tabulka 2). To je způsobeno zanedbáním některých ztrát (především ztrát v železe a ztrát způsobených mechanickým třením).

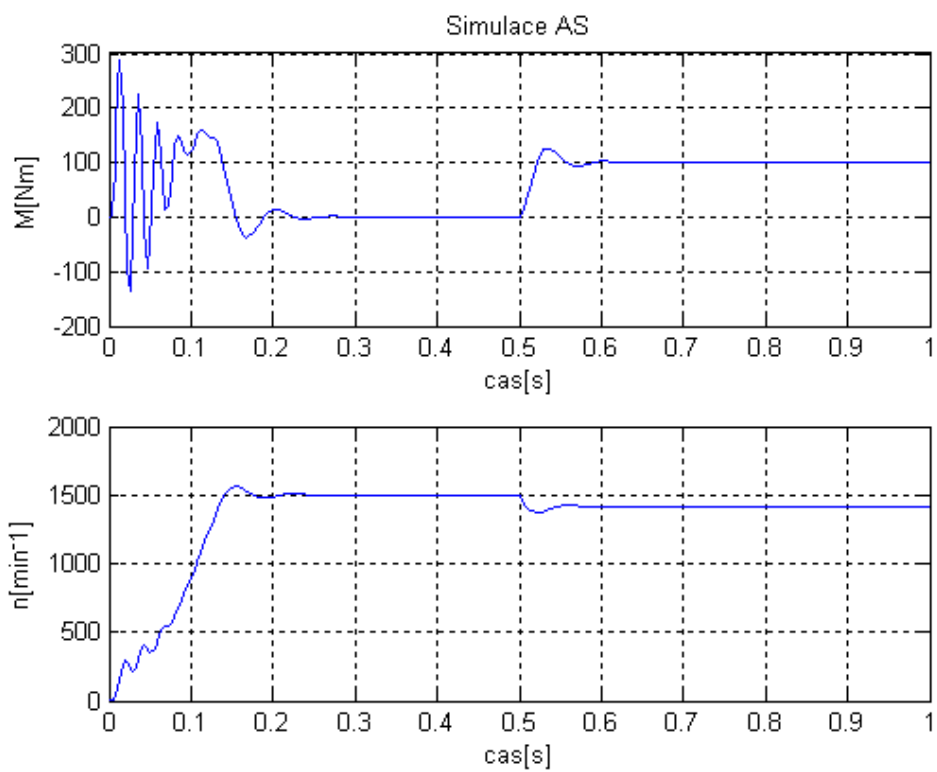
Poslední obrázek 7 zobrazuje časový průběh přechodové charakteristiky AS. Motor se nejprve rozbíhá naprázdno a v čase $t = 0.5s$ je na něj připojena konstantní zátěž $M_z = 100Nm$.



Obrázek 5: Momentová charakteristika.



Obrázek 6: Závislost účinnosti na dodávaném činném výkonu.



Obrázek 7: Přechodová charakteristika AS.

4 Závěr

V uvedeném článku byl odvozen simulační model asynchronního stroje. Uvedený model pokrývá jen elektrické vlastnosti AS. Mechanická část modelu je zahrnuta v jiné části celkového modelu kogenerační jednotky. Touto částí se tento článek nezabývá.

Reference

- [1] J. Javůrek J. Pavelka, J. Čeřovský. *Elektrické pohony*, volume 221. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2001. ISBN 80-01-02314-1.
- [2] J. Javůrek. *Regulace moderních elektrických pohonů*, volume 264. Grada Publishing, a.s., Praha, 2003. ISBN 80-247-0507-9.
- [3] V. Havlíček M. Mikulec. *Základy teorie elektrických obvodů*, volume 252. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997. ISBN 80-01-01620-X.
- [4] O. Wasynczuk P. C. Krause. *Analysis of Electric Machinery*. IEEE Press, 1995.
- [5] J. Gerlich. *Identifikace parametrů asynchronního motoru*, volume 95. ČVUT, Praha, 1995.
- [6] V. Suchánek J. Janoušek. *Základy silnoproudé elektrotechniky*, volume 152. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997. ISBN 80-01-00834-7.
- [7] P. Noskiewič. *Modelování a identifikace systémů*, volume 276. Montanex, a.s., Ostrava, 1999. ISBN 80-7225-030-2.
- [8] E. Krajník. *Maticový počet*, volume 131. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1998. ISBN 80-01-01723-0.