

URČENIE VISKO-ELASTICKÝCH VLASTNOSTI GUMY POMOCOU CURVE FITTING TOOLBOXU

R.Bartko

KFIM Fakulta priemyselných technológií Púchov, TnUAD

Abstract

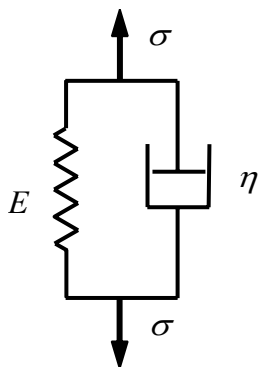
Hookov zákon popisuje vzťah medzi napätím a deformáciou. Pre materiály, ktoré majú malé tlmenie funguje dostatočne presne, avšak pre materiály (drevo, guma,...), ktoré majú veľké tlmenie, už efekt tlmenia nemôžeme zanedbať. Pre takéto materiály sa používajú visko-elastické modely (Kelvin-Voightov, Maxwellov,...) V článku je ukázané určovanie parametrov Kelvin-Voightovho modelu zo statických a dynamických meraní vzoriek gummy s využitím Curve Fitting Toolbox-u z Matlabu.

1 Úvod

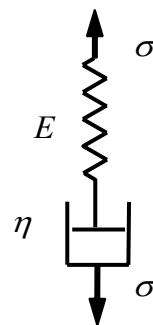
Pri modelovaní správania sa pneumatík je nutné poznať modeli a charakteristiky modelov materiálov, z ktorých sa pneumatika skladá. V článku sa zaoberáme modelovaním a hľadaním koeficientov modelov gummy zo vzoriek gummy pre pneumatiky.

2 Kelvin-Voightov a Maxwellov model

Najviac používané modely, ktoré popisujú aj frekvenčne závislé vlastnosti gummy je Kelvin-Voightov model a Maxwellov model, kde vlastnosti materiálu sú uvažované v dvoch zložkách. Elastické vlastnosti materiálu sú modelované ako lineárna pružina s konštantnou tuhosťou a viskózne vlastnosti materiálu sú modelované ako lineárny tlmič s konštantným tlmením. Tieto dva prvky sú v modeli paralelne zapojené (Kelvin-Voightov model) alebo sériovo (Maxwellov model).



Obr. 1 Kelvin-Voigtov model



Obr. 2 Maxwellov model materiálu

Kelvinov-Voigtov model (Obr. 1.) je popísaný diferenciálnou rovnicou v tvare

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (1)$$

kde η je koeficient viskozity. Riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{t_R}} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\frac{\tau}{t_R}} d\tau \right) \quad (2)$$

Pre prípad zaťaženia konštantným napätím $\sigma(t) = \sigma$ je riešenie v tvare

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{t_R}} \right) \quad (3)$$

kde

$$t_R = \frac{\eta}{E} \quad (4)$$

je relaxačný čas. Analogicky dostaneme všeobecné riešenie pre Maxwellov model (Obr. 2) v tvare

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \frac{1}{\sigma t_R} \int_0^t \sigma_V(\tau) d\tau \right) \quad (5)$$

Pre prípad zaťaženia konštantným napätím $\sigma(t) = \sigma$ je riešenie v tvare

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 + \frac{t}{t_R} \right) \quad (6)$$

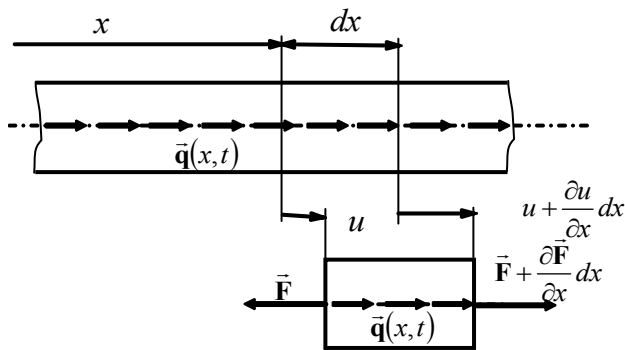
Z týchto základných modelov môžeme skladať zložitejšie modely materiálu, ktoré sú bližšie k reálnej charakteristike materiálu.

3 Pozdĺžne kmitanie tyče

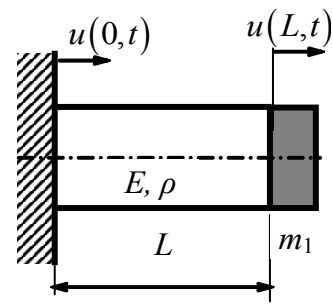
Pre vyhodnotenie dynamických meraní si uvedieme stručne teória popisujúcu pozdĺžne kmitanie tyče. Pohybová rovnica tyče (model je na Obr. 3)

$$\rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x,t) \quad (7)$$

kde L je dĺžka tyče, $S(x)$ je prierez tyče, ρ je hustota materiálu, $q(x,t)$ je záťaž v mieste x a v čase t , $u(x,t)$ je posunutie prierezu $S(x)$ v mieste x a v čase t .



Obr. 3 Pozdĺžne kmitanie tyče



Obr.4 Okrajové podmienky upevnenia tyče

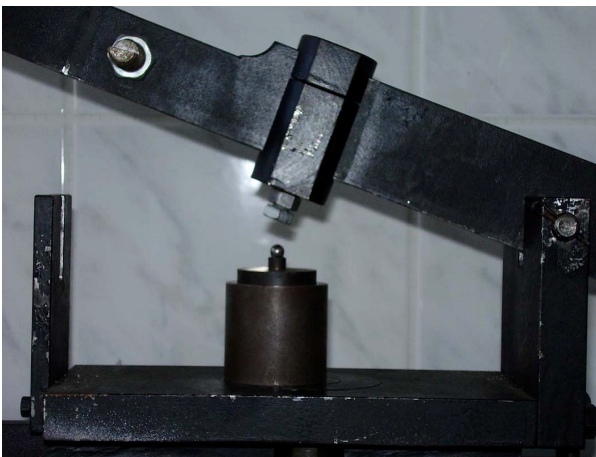
Riešením parciálnej diferenciálnej rovnice (7), pre okrajové podmienky (Obr. 4)

$$u(0,t) = 0; \quad ESu'(L,t) = -m_1 \ddot{u}(L,t) \quad (7)$$

kde m_1 je hmotnosť závažia, dostávame frekvenčnú rovnicu v tvare

$$\frac{\rho SL}{m_1} = \frac{\Omega L}{c_o} \tan\left(\frac{\Omega L}{c_o}\right), \quad \text{kde} \quad c_o = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8)$$

Ω je vlastná kruhová frekvencia pozdĺžneho kmitania tyče a c_o má fyzikálny význam rýchlosti pozdĺžnej vlny.



Obr. 5 Statické meranie

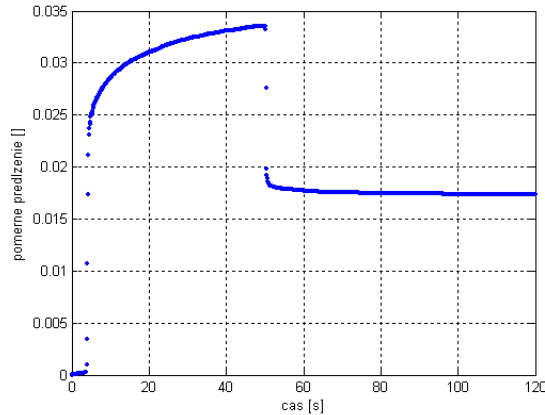


Obr. 6 Dynamické meranie

4 Meranie

Vzorka gummy sú v tvare valca s rozmermi $\phi = 29,5\text{mm}$, $L = 12,5\text{mm}$, $\rho = 1091\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Vzorky boli merané v statickom a dynamickom režime. Pri meraní v statickom režime boli zaťažené konštantným tlakom na aparátúre na Obr. 5. Vzorky sme merali pri jednoosovom a trojosovom stave napätosti. Merania boli vykonané na 10 vzorkách pri rôznych záťažach pri konštantnej teplote 21°C . Po každom meraní sa nechala vzorka 24 hodín relaxovať. Na Obr. 7 je ukážka statického merania

Dynamické merania sme vykonali na zariadení na Obr. 6. Odozva bola meraná pomocou meracieho reťazca pozostávajúceho z budiča Brüel&Kjær Mini-shaker 4810, snímača zrýchlenia, nábojového zosilňovača, AD/DA prevodníkovej karty a počítača. Frekvenčná odozva bola meraná v rozsahu od 50Hz do 2500Hz.



Obr. 7 Pomerné predĺženie v závislosti na čase

5 Vyhodnotenie meraní

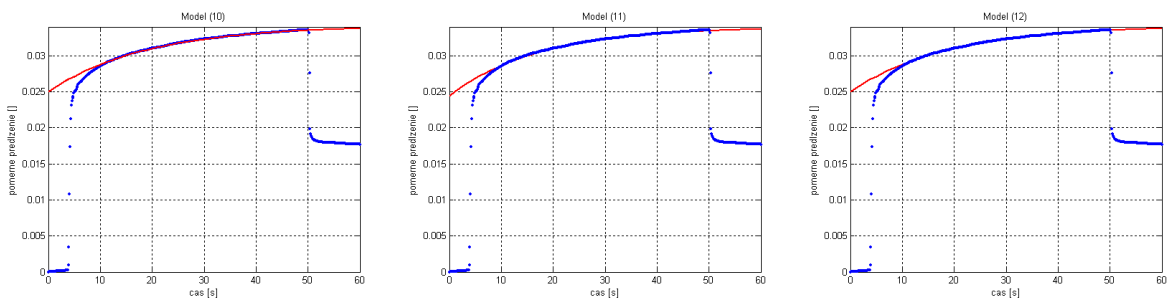
Merania sme vyhodnocovali pomocou Curve Fitting Toolbox-u v programe MATLAB. Na základe nameraných priebehov a predpokladaného matematického modelu v tvare (8) sme navrhli štyri regresné modely

$$\varepsilon(t) = a \left(1 - e^{-\frac{t}{b}} \right) \quad (9)$$

$$\varepsilon(t) = a - ce^{-\frac{t}{b}} \quad (10)$$

$$\varepsilon(t) = a - ce^{-\frac{t+d}{b}} \quad (11)$$

$$\varepsilon(t) = a \left(1 - e^{-\frac{t+d}{b}} \right) \quad (12)$$

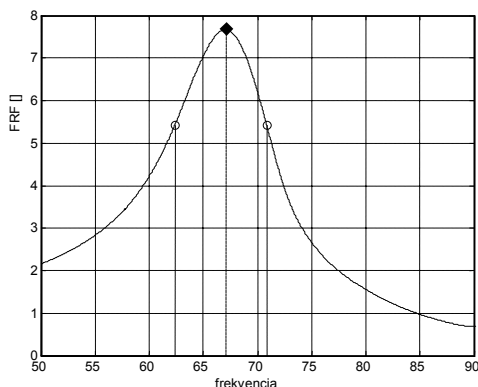


Obr. 8 Regresné modely (10), (11), (12)

Hľadanie koeficientov regresných modelov sme previedli na riešenie nelineárnej optimalizačnej úlohy pomocou metódy najmenších štvorcov. Pre výpočet sme zvolili robustný algoritmus „Trust

Region method“ s vedľajšími podmienkami, ktoré požadovali kladnosť koeficientov a , b , c . Model (9) sa ukázal ako nevyhovujúci.

Koeficienty modelov môžeme porovnať z výsledkov z dynamických meraní (Obr. 9). Z nameranej prenosovej funkcie môžeme zistiť vlastnú kruhovú frekvenciu a riešením rovnice (8) vypočítať Youngov modul E . Zo šírky piku sa môžeme určiť η je koeficient viskozity



Obr. 9 Nameraná FRF funkcia

5 Záver

V článku je ukázaný postup merania a vyhodnotenia Youngovho modulu v ťahu-tlaku E a dynamickej viskozity η gummy. Navrhli sme 4 rôzne modely, ktorých parametre sme určovali pomocou nelineárnej metódy najmenších štvorcov. Jeden model nedával zmyslu výsledky a bol z vyhodnotenia vylúčený.

Literatúra

- [1] Kuba, F. *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. SNTL/ALFA, Praha 1982.
- [2] Němec, J. – Puchner, O. *Tvarová pevnost kovových těles*. SNTL/ALFA, Praha 1971.
- [3] Bartko, R. – Valášek, R. – Malíčková, P. – Vavro, J. – Fandáková, M. *Experimental Determination of Young's Modulus of Rubber from Static and Dynamic Measurements*, XI International Conference Computer Simulation in Machine Design. COSIM2006, Krynica Zdrój, Poľsko, 2006.
- [4] Sjöberg, M. – Leif, K. *Non-Linear Behavior of a Rubber Isolator System Using Fractional Derivatives*. *Vehicle System Dynamics*, Vol. 37, No. 3, pp. 217-236, 2002
- [5] Nielsen L.F. – Wismer N.J. – Gade S. *Improved Method for Complex Modulus Estimation*. Application note B&K Denmark, pp.1-7.

Ing. Róbert Bartko, PhD.
Katedra fyzikálneho inžinierstva materiálov
Fakulta priemyselných technológií, TnUAD
I. Krasku 491/30
020 32 Púchov
e-mail: bartko@fpt.tnuni.sk
tel.: +421 42 4613840