STANOVENÍ POMĚRNÉ PLOŠNÉ DRSNOSTI POVRCHU

J. Tesař[1], *J. Kuneš*[2]

[1] Nové technologie – výzkumné centrum, Univerzitní 8, 306 14, Plzeň

[2] Katedra fyziky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita, Univerzitní 22, 306 14, Plzeň

Abstrakt

Hodnocení povrchu materiálu je prováděno podle hodnoty drsnosti, standardně střední aritmetickou odchylkou profilu R_a, která je měřena mechanickými nebo optickými metodami. Pro komplexnější vystižení drsnosti lze použít poměrnou plošnou drsnost, která je dána poměrem plochy geometrického průmětu a plochy nerovného povrchu. Pro určení poměrné plošné drsnosti je potřeba znát prostorové rozložení povrchových bodů, které bylo změřeno rastrovacím profilometrem na vzorku otryskané oceli a vzorku s cermetem. Výpočet poměrné plošné drsnosti byl proveden v MATLABu metodou trojúhelníků (Δ), pomocí metody Monte Carlo (MC) a přímou integrací (PI). Principy uvedených metod jsou detailně popsány a jejich výsledky porovnány pro různé parametry zjemnění mříže.

1 Úvod

Jednou z nejdůležitějších vlastností každého materiálu jsou jeho povrchové vlastnosti, mezi nimi i drsnost, která ovlivňuje koeficient tření. Z mikroskopické perspektivy je tření způsobeno interakcí mezi nerovnostmi povrchů. Povrchy krystalických látek, které se zdají být zcela hladké, jsou ve skutečnosti poněkud hrubé. Jediný skutečný kontakt mezi dvěma povrchy se nachází ve vazbách mezi nerovnostmi – plocha těsného kontaktu je malá. Z makroskopického hlediska je tření nezávislé na zdánlivé ploše kontaktu. Při bližším zkoumání však skutečná plocha kontaktu opravdu ovlivňuje tření. Jak zatížení přitlačuje povrchy k sobě, tak vzrůstá deformace drsností a tím vzrůstá skutečná plocha kontaktu a následně i statická třecí síla [1].

Drsnost povrchu je standardně charakterizována střední aritmetickou odchylkou, která je definována [2]

$$R_a = \frac{1}{l}\int_0^l |y(x)|dx\,; \qquad R_a \doteq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y(x_i)|\,, \tag{1}$$

kde $y(x)$ popisuje odchylku od základní čáry profilu. Tato veličina však nestačí na úplné popsání třecího povrchu, ale jsou potřebné další údaje o velikosti, tvaru, absolutní a relativní četnosti mikronerovností a i údaje o celkové morfologii a topografii povrchu. Další informaci dává poměrná plošná drsnost ve tvaru bezrozměrného kritéria

$$f_{rel} = \frac{A_g}{A_{rough}}\,, \qquad f_{rel} \in \langle 0;1 \rangle \tag{2}$$

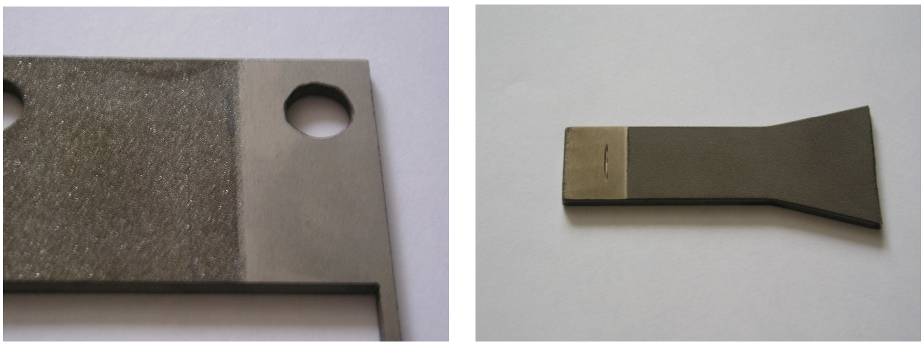
kde A_g je plocha vymezená geometrickým rozměrem a A_{rough} je plocha určená nerovností povrchu.

2 Měření profilu povrchu

Měření profilu povrchu bylo provedeno na mechanickém rastrovacím profilometru DEKTAK 8 od firmy Veeco [3]. Samotné zařízení je umístěno na plovoucí stolek, který brání přenosu vibrací z okolního prostředí. Na hrotu snímače DEKTAK je diamantová kulička o poloměru r = 12,5 μm, která kopíruje povrch vzorku a generuje signál nesoucí informaci o profilu. Tento signál je zesílen a přenesen do počítače. Měřeny byly dva vzorky:

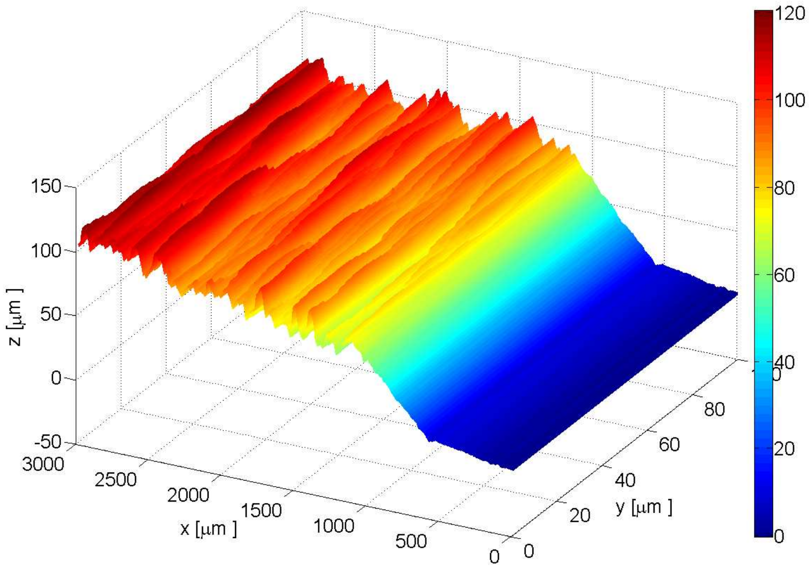
a) ocel 11418 otryskaná korundem (standardní otryskání částicemi korundu Al_2O_3),

b) vzorek s otěruvzdornou vrstvou cermetu Cr_3C_2 – NiCr nanesenou na ocel 11418 metodou HVOF (High Velocity Oxygen Fuel).

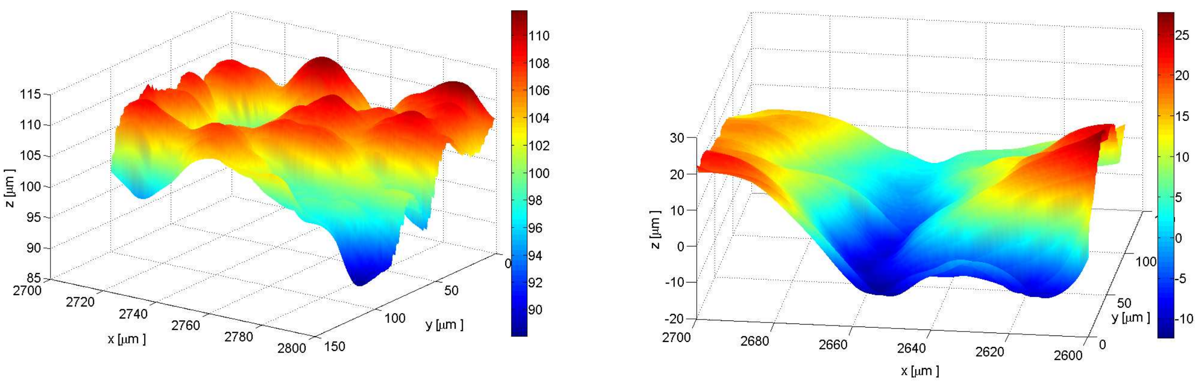


Obr. 1: a) vzorek oceli otryskané korundem, b) vzorek s vrstvou cermetu Cr_3C_2 – NiCr

Pro vytvoření vztažné roviny byla část obou vzorků obroušena. Měřená oblast se skládá z obroušené části, přechodové části a vlastního měřeného povrchu vzorku. Pro získání prostorového obrazu povrchu bylo měřeno 101 scanů profilu v délce 3000 μm ve vzdálenosti 1 μm od sebe, nasnímaná oblast má rozměr 3000 x 100 μm. Na scan délky 3000 μm připadá 4500 vzorkovacích bodů, vzdálenost mezi jednotlivými body ve směru osy *x* je tedy 0,667 μm. Souřadnice jednotlivých bodů se ukládají do souboru a po načtení je lze v MATLABu zobrazit do 3D grafu (obr. 2 a 3).



Obr. 2: Povrch vzorku cermetu zachycujíci obroušenou část (modrá barva), přechodovou část a samotný cermet (žlutá a červená)



Obr. 3: Povrch vybrané části vzorku cermetu a otryskané oceli o velikosti 100 x 100 μm

3 Určení plochy pomocí trojúhelníků

Nejjednodušší metoda, jak určit plochu zvlněného povrchu ze známých souřadnic ve směru osy *z* z jednotlivých bodů (výšek), je pomocí trojúhelníků. Rozestupy mezi sousedními body jsou konstantní, ve směru osy *x* je to 0,667 μm a ve směru osy *y* 1 μm. Souřadnice bodů ve směru osy *z* se liší. Podle obr. 4 je možné spočítat přibližný obsah plochy mezi čtyřmi body A, B, C a D rozdělením obrazce ABCD na 2 trojúhelníky. Obsah těchto trojúhelníků se spočítá podle Heronova vzorce z velikostí úseček mezi jednotlivými body, které se určí Pythagorovou větou. Z trojúhelníku AOB se určí délka strany *a*

$$a = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2}\,, \tag{3}$$

z trojúhelníku BPC délka strany *b*

$$b = \sqrt{|BP|^2 + |CP|^2} \tag{4}$$

a z trojúhelníku AQC délka strany *e*

$$e = \sqrt{|AQ|^2 + |CQ|^2}\,. \tag{5}$$

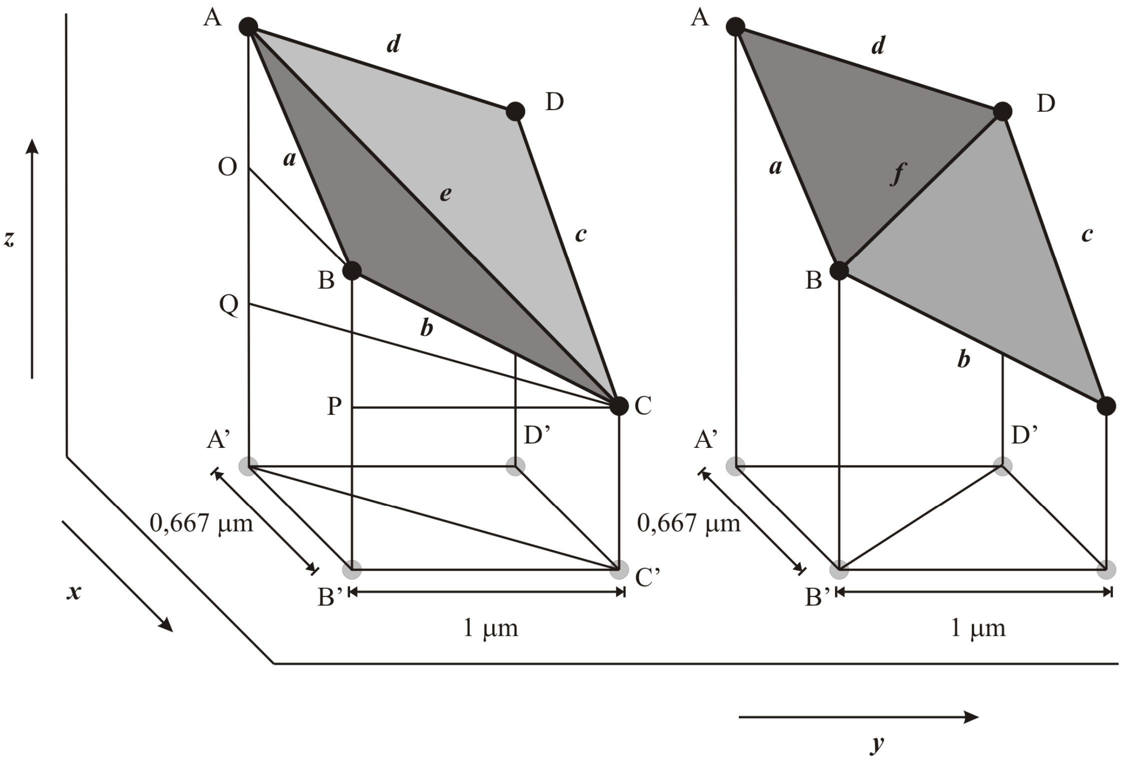
Obsah trojúhelníku ABC je potom

$$S_{ABC} = \sqrt{s_{abc} \cdot (s_{abc} - a) \cdot (s_{abc} - b) \cdot (s_{abc} - e)}\,, \tag{6}$$

kde

$$s_{abc} = \frac{a + b + e}{2}\,. \tag{7}$$

Obdobně se postupuje i u ostatních stran a ploch trojúhelníků. Celková plocha povrchu je dána součtem ploch všech takovýchto trojúhelníků ve vybrané oblasti, průchod přes vybranou oblast se zajistí cyklem. Změnou uvažovaných trojúhelníků z ABC a ACD na ABD a BCD lze obecně dostat jinou velikost plochy.



Obr. 4: Znázornění bodů a trojúhelníků v prostoru

Výpočet se provede procedurou vytvořenou v programu MATLAB, kde lze zadat část z celkového povrchu počátečním bodem $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ a koncovým bodem $\mathrm{N}(x_2, y_2)$. Plochu průmětu vybrané části povrchu do roviny *xy* lze jednoduše spočítat jako plochu obdélníku

$$A_g = (x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)\,. \tag{8}$$

4 Odvození vztahu pro analytické určení plochy

V jednorozměrném případě, pro výpočet délky úsečky, lze pro element délky psát

$$dl^2 = dx^2 + dy^2, \tag{9}$$

odkud

$$dl = \sqrt{1 + f_x^2(x)}, \tag{10}$$

viz [4]. Výraz $f_x(x) = \frac{dy}{dx}$ označuje derivaci funkce $f(x)$ podle proměnné *x*. Celková délka křivky pak může být vyjádřena jako určitý integrál

$$l = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + f_x^2(x)}dx. \tag{11}$$

Zobecněním této úvahy na 2D problém lze elementární plošku *dS* vyjádřit jako

$$dS = dl_{(x)} dl_{(y)} = \sqrt{1 + f_x^2(x,y)} \cdot \sqrt{1 + f_y^2(x,y)}, \tag{12}$$

kde $dl_{(x)}$ je element délky ve směru osy *x* a $dl_{(y)}$ element délky ve směru osy *y*. Celkovou plochu lze spočítat jako dvojný integrál přes celé intervaly hodnot *x* a *y*

$$S = \int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} \sqrt{1 + f_x^2(x,y)} \cdot \sqrt{1 + f_y^2(x,y)}\, dx\, dy. \tag{13}$$

5 Určení plochy pomocí metody Monte Carlo

Vypočítat integrál (13) může být složitý numerický problém. Jednoduše ho však lze řešit metodou Monte Carlo [5]. Úkolem je totiž spočítat objem tělesa pod plochou danou výrazem *dS*.

Element plochy *dS* se vsadí do kvádru o výšce větší než je maximální hodnota funkce *dS*. Objem tělesa pod ploškou elementu *dS* lze určit provedením velkého počtu náhodných umístění bodů do prostoru vymezeného kvádrem. Poměr počtu bodů pod ploškou *dS* k celkovému počtu bodů odpovídá poměru objemu pod ploškou *dS* k celkovému objemu kvádru, tj.

$$\frac{N_{úsp}}{N_{pok}} = \frac{V}{V_{celk}}, \tag{14}$$

$N_{úsp}$ označuje počet bodů (úspěšných pokusů), které padnou pod element plošky *dS*, N_{pok} celkový počet bodů (pokusů), *V* objem pod elementem plošky *dS* a V_{celk} objem kvádru.

Nejprve je nutné upravit data získaná měřením. Data se ve formě funkce $f(x,y)$ interpolují v MATLABu kubickým splinem na jemnější mříži. Získaná funkce je podle své definice spojitě diferencovatelná minimálně do prvního řádu. Proto existují spojité první derivace $f_x(x,y)$ a $f_y(x,y)$, které jsou zapotřebí při výpočtu plochy *S*. Pro výpočet funkcí se použije MATLABovská funkce gradient.

Nyní je možné aplikovat metodu Monte Carlo a určit tak objem pod plochou *dS*. Postup je následující:

1. Čítač počtu pokusů N_{pok} a počtu úspěchů $N_{úsp}$ se nastaví na nulu.
2. Vygenerují se tři náhodná čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ s rovnoměrným rozdělením, $\gamma_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$, $\gamma_2 \in \langle y_1, y_2 \rangle$ a $\gamma_3 \in \langle 0, \max imum(dS) \rangle$. Horní mez třetího intervalu lze případně nepatrně zvýšit (v programu je zvětšena o 10%), aby program počítal se všemi hodnotami, což zaručuje stabilitu programu (výpočet probíhá numericky a nečekané maximum nelze vyloučit).
3. Otestuje se, zda hodnota funkce *dS* v bodě $[\gamma_1, \gamma_2]$ je větší než hodnota čísla γ_3. Pokud ano, pak se zvětší čítač pokusů N_{pok} a čítač úspěchů $N_{úsp}$ o jednotku, pokud ne, zvětší se o jednotku pouze čítač pokusů.

4. Opakují se kroky 2 a 3 až se hodnota podílu čítačů $\frac{N_{úsp}}{N_{pok}}$ příliš nemění. Získaná hodnota vynásobená objemem tělesa, ve kterém byly generovány náhodné body, tj. hodnotou

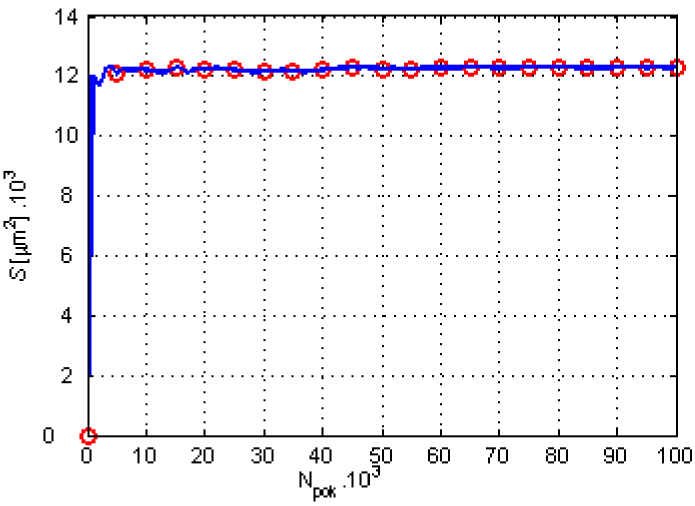
$$V_{celk} = (x_2 - x_1)\cdot(y_2 - y_1)\cdot(\ \text{maximum}(dS) - 0) \tag{15}$$

odpovídá hledané velikosti plochy S (objemu $V_{úsp}$)

$$S = V = V_{celk} \cdot \frac{N_{úsp}}{N_{pok}}. \tag{16}$$

Získaná hodnota plochy S ($S = A_{rough}$) a plocha průmětu do roviny xy charakterizují poměrnou plošnou drsnost vzorku f_{rel} podle vztahu (1).

Parametrem metody Monte Carlo je počet provedených pokusů o umístění náhodného bodu pod plochu dS. Se vzrůstajícím počtem pokusů hodnota daná vztahem (16) konverguje ke skutečné hodnotě velikosti plochy S. Nejedná se však o konvergenci tak je známa z teorie řad, ale o pravděpodobnostní konvergenci.



Obr. 5: Pravděpodobnostní konvergence metody Monte Carlo

Z obr. 5 je patrné, že po 30 tisích pokusech již nedochází k výrazné změně v hodnotě velikosti plochy S. Tato hodnota N_{pok} je považována jako minimální počet pokusů, které je použito hlavně v případech většího zjemnění mříže, které má za následek i větší časovou náročnost výpočtu.

6 Určení plochy přímou integrací

Integrál (13) lze v MATLABu vypočítat pomocí funkce *dblquad*, která je definována [6]

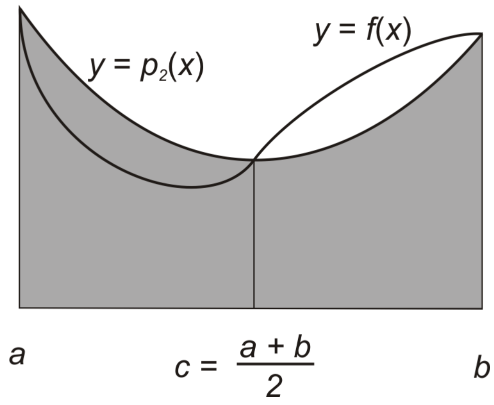
q = dblquad(fun,xmin,xmax,ymin,ymax,tol)

kde *fun* je handle funkce $f(x,y)$, parametry *xmin,xmax,ymin,ymax* vymezují integrační oblast - obdélník daný body *xmin,xmax,ymin* a *ymax*. Parametr *tol* určuje absolutní chybovou toleranci, jejíž default hodnota je 1,0e-6. Větší hodnoty parametru *tol* mají za následek méně vyhodnocení funkcí a rychlejší výpočet, ale méně přesné výsledky. Funkce *dblquad* je dvourozměrnou podobou funkce *quad*, která k výpočtu používá rekurzivní adaptivní Simpsonovu kvadraturu.

Základním principem odvození Simpsonovy metody (pro 1D případ) je aproximace funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ polynomem $p_2(x)$ nejvýše druhého stupně. Potom platí

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx. \tag{17}$$

Polynom p_2 je zvolen tak, že se s funkcí f shoduje alespoň ve třech bodech a, b a $c = \frac{a+b}{2}$ (viz obr. 6).



Obr. 6: Princip aproximace funkce $y = f(x)$ polynomem druhého stupně na intervalu $\langle a, b \rangle$

V [7] je odvozen postup, kterým lze dospět k výrazu

$$\int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right], \tag{18}$$

kde $h = \dfrac{b-a}{2}$.

Velký interval nelze aproximovat najednou, postupuje se tak, že pro každé sudé přirozené číslo $n = 2m$ je rozdělen interval $\langle a, b \rangle$ na n stejných dílků délky $h = \dfrac{b-a}{n}$ dělícími body x_i, i = 0, 1, …, n. Označí se $y_i = f(x_i)$, i = 0, 1, …, n a v každém z intervalů $<x_{2i}, x_{2i+2}>$, i = 0, 1, …, m – 1 se užije aproximace (19), tj.

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}\right), \tag{19}$$

Sečtou-li se vztahy (19) přes všechny „dvojdílky“, výsledkem je vztah

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right], \tag{20}$$

Při označení

$$S_n = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right], \tag{21}$$

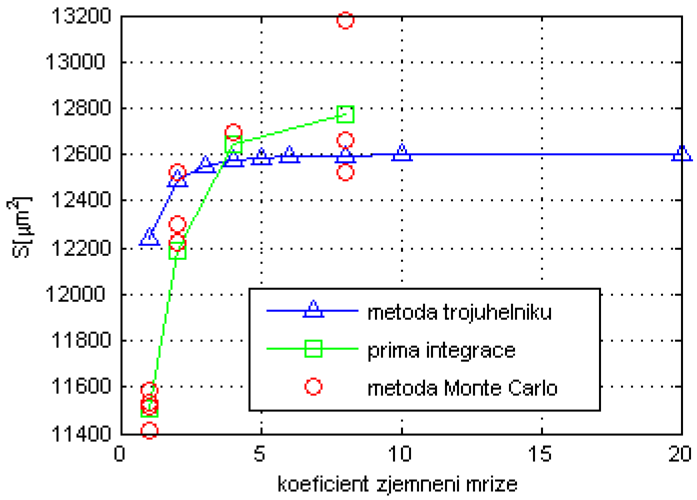
potom platí pro každé sudé přirozené číslo n

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{22}$$

7 Závislost plochy na zjemnění mříže

Pro zvýšení přesnosti určení plochy zvlněného povrchu byla v MATLABu zjemněna síť naměřených bodů přidáním jednoho bodu mezi dva sousední ve směru os (zjemnění 2x), dvou bodů (zjemnění 3x) atd. až do osminásobného a dvacetinásobného zjemnění pro výpočet přímou integrací a pomocí metody Monte Carlo, resp. metodu trojúhelníků. Nově vzniklým bodům byly dopočítány výšky interpolací kubickým splinem. Tato úprava dodává povrchu realističtější vzhled bez ostrých hran, které se obecně vyskytují jen zřídka.

Zvyšující se zjemňování mříže má za následek zvětšení plochy S_{rough} a tudíž zmenšení poměrné plošné drsnosti f_{rel}. Závislost na zjemnění mříže při geometrické ploše A_g = 10000 μm^2 pro všechny metody vyjadřuje obr. 7. Při výpočtu přímou integrací byl použit parametr tol = 0,1. Při výpočtu pomocí metody Monte Carlo bylo při jednonásobném zjemnění mříže provedeno 100 tisíc pokusů, při dvojnásobném a čtyřnásobném zjemnění mříže 50 tisíc pokusů a při osminásobném zjemnění 30 tisíc pokusů z důvodu zvyšující se časové náročnosti výpočtu.



Obr. 7: Závislost velikosti plochy S_{rough} cermetu na koeficientu zjemnění mříže pro metody Δ, PI a MC

Při výpočtu pomocí trojúhelníků dosáhne velikost plochy S takové hodnoty, že další zvyšování koeficientu zjemnění mříže již nemá další vliv na velikost této plochy S. Podobný průběh se dá očekávat i u přímé integrace, výpočet však nebyl proveden z důvodu velké časové náročnosti. U metody Monte Carlo je zobrazeno vždy několik bodů pro jednu hodnotu zjemnění mříže, protože se jedná o pravděpodobnostní metodu a při každém výpočtu je dosaženo jiného výsledku.

8 Výsledky

Hodnoty poměrné plošné drsnosti byly vypočteny na vzorku cermetu a otryskané oceli. Tabulka 1 zobrazuje porovnání hodnot f_{rel} pro osminásobné zjemnění mříže.

Tab. 1: Hodnoty poměrné plošné drsnosti pro vzorek cermetu a otryskané oceli

Vzorek	Metoda	f_{rel} (-)
Cermet	Δ	0,7938
	MC	0,7899
	PI	0,7830
Otryskaná ocel	Δ	0,7331
	MC	0,7255
	PI	0,7181

Vypočtené hodnoty poměrné plošné drsnosti různými metodami vykazují malý rozptyl.

9 Závěr

Bylo zjištěno výškové rozložení povrchu vzorku cermetu a otryskané oceli a zobrazeno ve 3D grafu. Poměrná plošná drsnost byla vypočtena metodou trojúhelníků, pomocí metody Monte Carlo a přímou integrací. Byla ukázána závislost velikost zvlněné plochy na koeficientu zjemnění mříže.

Literatura

[1] J. Bečka. *Tribologie*. ČVUT, Praha, 1997
[2] P. Blaškovič, J. Balla, M. Dzimko. *Tribológia*. Alfa, Bratislava, 1990
[3] http://www.veeco.com/Products/metrology_and_instrumentation/Stylus_Profilers/Dektak_8/index.aspx?prodGroup=0
[4] J. Tesař. *Sbírka úloh z matematiky pro fyziky*. JU České Budějovice, 1995
[5] R. Hrach. *Počítačová fyzika I*, Ústí nad Labem, 2003
[6] http://www.mathworks.com; MATLAB Help – dblquad, quad
[7] J. Vilhelm. *Zpracování geofyzikálních dat*, Praha, 2006
[8] J. Tesař, J. Kuneš. *Termomechanika v tribologických procesech na povrchových vrstvách*. Diplomová práce, Plzeň, 2006

Jiří Tesař
Termomechanika technologických procesů
Nové technologie – výzkumné centrum
Západočeská univerzita
Univerzitní 8, 306 14, Plzeň
tesar@ntc.zcu.cz

Josef Kuneš
Katedra fyziky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita
Univerzitní 22, 306 14 Plzeň
kunes@kfy.zcu.cz