

# FYZIKÁLNÍ MODEL KYVADLA NA VOZÍKU

F. Dušek, D. Honc

Katedra řízení procesů, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Univerzita Pardubice

## Abstrakt

Článek se zabývá sestavením nelineárního dynamického modelu chování reálného zařízení – kyvadla na vozíku. Kyvadlo je připevněno na vozíku vedeném dvěma tyčemi. Pohyb vozíku ovládán stejnosměrným motorem s permanentními magnety. Cílem příspěvku je sestavit matematický model zařízení maximálně využívající známé konstrukční, mechanické a elektrické charakteristiky fyzického laboratorního zařízení. Tento nelineární model je dále linearizován do tvaru standardního lineárního stavového popisu, kde vstupem je napájecí napětí motoru a výstupem poloha vozíku a úhel kyvadla. Lineární model bude použit pro návrh regulátoru polohy vozíku s kyvadlem udržovaným v horní metastabilní poloze.

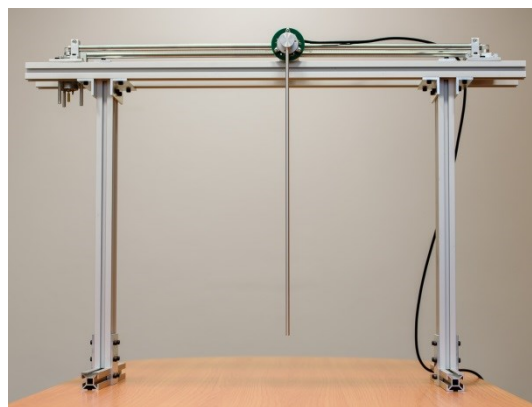
## 1 Úvod - určení modelu

Laboratorní zařízení – kyvadlo na vozíku – je navrženo a vyrobeno pro potřeby výuky na Katedře řízení procesů FEI Univerzity Pardubice v oblasti modelování a simulace, experimentální identifikace a teorie řízení. V tomto článku je popsáno vytvoření nelineárního modelu zařízení metodou matematicko-fyzikální analýzy vycházející z konstrukce a provedení daného zařízení. Výsledný spojitý nelineární matematický model popisuje dynamiku všech tří základních částí (kyvadla, vozíku a elektromotoru) včetně vzájemného ovlivňování v závislosti na napájecím napětí motoru. Důraz je kladen na sestavení rovnic vycházejících ze základních fyzikálních představ o působících silách a momentech a respektujících konkrétní konstrukční řešení. Tento přístup umožňuje přímo určit či aspoň odhadnout hodnoty většiny parametrů modelu.

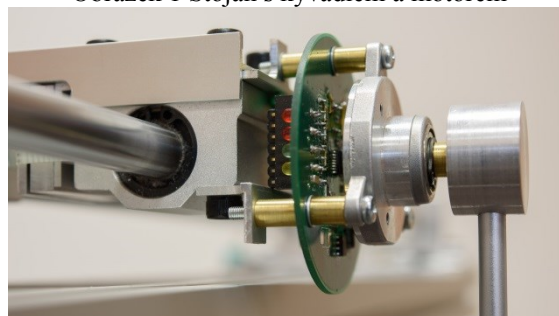
Nelineární model je základem pro experimentální identifikaci, kdy budou určeny korekce vybraných parametrů matematického modelu takové, aby dynamické chování modelu maximálně odpovídalo průběhům změřeným na reálném zařízení. Pro potřeby návrhu regulace je provedena linearizace nelineárního modelu do tvaru standardního lineárního stavového modelu. Stavový model bude základem pro návrh a realizaci stavového regulátoru s estimací stavu udržujícího kyvadlo v horní metastabilní poloze při pohybu vozíku sledujícího změny žádané polohy. Věrohodný nelineární model je také předpokladem pro návrh automatického vzpřímení kyvadla z dolní stabilní polohy do horní metastabilní polohy.

## 2 Popis zařízení

Celé zařízení bylo po mechanické i elektrické stránce od počátku navrženo pro použití v laboratoři. Základem je stojan z hliníkových profilů s dvěma tyčemi vedoucími vozík, na kterém je umístěna osa otáčení tyče kyvadla viz obrázek 1. Kyvadlo je volně otočné a jeho poloha je snímána čidlem úhlu otočení – rotačním magnetickým enkodérem AS5040 fy ams AG [1] s rozlišením 10 bitů (1024 pulsů) na otáčku (viz obrázek 2). Pohyb vozíku je ovládán ozubeným řemenem přes řemenici umístěnou přímo na ose stejnosměrného kartáčového motoru s permanentními magnety Mabuchi C2162. Otáčky motoru jsou měřeny druhým enkodérem AS5040 umístěným na ose motoru (viz obrázek 3). Motor je napájen 24 V a jeho otáčky jsou ovládány řídicí jednotkou s řídicím signálem 0-5 V, kde nulovým otáčkám odpovídá 2.5 V. Nulové napětí vyvolá maximální otáčky jedním směrem a



Obrázek 1 Stojan s kyvadlem a motorem

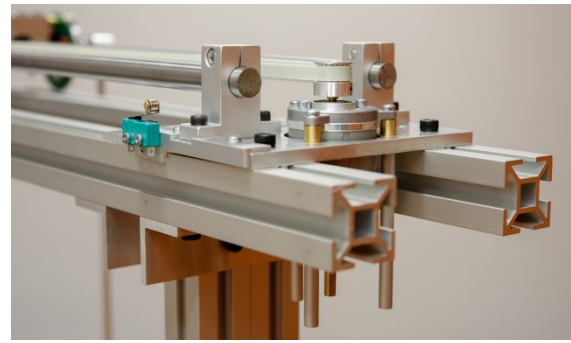


Obrázek 2 Čep kyvadla s enkodérem

napětí 5 V maximální otáčky druhým směrem. Krajní polohy dráhy vozíku jsou opatřeny koncovými spínači.

### 3 Sestavení matematického modelu

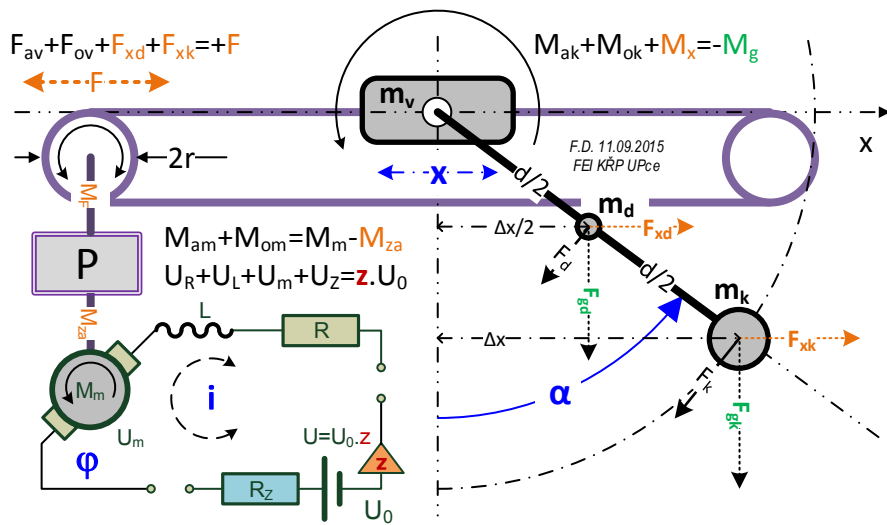
Matematický popis zařízení se skládá ze tří samostatných částí, které se vzájemně ovlivňují. Základem modelu je popis ideálního chování jednotlivých částí vycházející z bilance působících sil a momentů. Přizpůsobení reálnému chování je dosaženo zahrnutím mechanických odporů. Je použita nejjednodušší aproximace – síla odporu je přímo úměrná rychlosti pohybu či rotace příslušné části. Konstanty úměrnosti budou určeny experimentálně na základě vyhodnocení měření provedených na zařízení.



Obrázek 3 Motor s řemenicí

Sestavení bilancí vychází z principiálního schématu zařízení na obrázku 4, kde je zobrazeno i náhradní elektrické zapojení motoru s odporem vinutí  $R$  a indukčností  $L$  včetně zdroje s vnitřním odporem  $R_z$ .

Motor je propojen převodem  $P$  s pohybem vozíku o hmotnosti  $m_v$ . Pro zjednodušení se předpokládá, že toto propojení (realizované řemenicí o poloměru  $r$ ) je dokonale tuhé (bez pružných prvků). Předpokládá se, že kyvadlo je tvořené tyčí konstantního průřezu o hmotnosti  $m_d$  a délce  $d$ , která na konci závaží o hmotnosti  $m_k$ .



Obrázek 4 Principiální schéma zařízení

#### 3.1 Bilance sil - vozík

Na pohyb vozíku mají vliv pouze síly působící v ose jeho pohybu (osa  $x$ ). Poloha vozíku je označena  $x$ . Těžiště tyče (či závaží) kyvadla se ve směru osy  $x$  pohybují vzhledem k poloze vozíku o relativní vzdálenost  $\Delta x/2$  (či  $\Delta x$ ). Na vozík působí síla akcelerační  $F_{av}$ , síla odporu  $F_{ov}$  a síly vyvolané pohybem kyvadla  $F_{xd}$  (tyč) a  $F_{xk}$  (závaží). Všechny tyto síly musí být v rovnováze se silou  $F$ , kterou na vozík působí řemen pohonu. Bilanci sil tj. závislost dráhy vozíku  $x$  na úhlu natočení kyvadla  $\alpha$  a působící síle  $F$  lze popsat rovnicí

$$F_{av} + F_{ov} + F_{xd} + F_{xk} = F \quad [kg \cdot m \cdot s^{-2} = N] \quad (1)$$

kde	$F$	externí síla (tah řemene)
	$F_{av} = m_v \frac{d^2 x}{dt^2}$	síla setrvačná vozíku
	$F_{ov} = k_v \frac{dx}{dt}$	síla aproximující odpor pohybu vozíku $k_v$ [ $kg \cdot m \cdot s^{-1}$ ]
	$F_{xd} = m_d \frac{d^2}{dt^2} (x + \frac{1}{2} \Delta x)$	síla setrvačná ramene kyvadla
	$F_{xk} = m_k \frac{d^2}{dt^2} (x + \Delta x)$	síla setrvačná koncového závaží kyvadla
	$\Delta x = d \cdot \sin(\alpha)$	relativní změna polohy těžiště závaží kyvadla v ose $x$

$$\frac{d\Delta x}{dt} = d \cdot \cos \alpha(t) \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2\Delta x}{dt^2} = d \left[ -\sin \alpha(t) \left( \frac{d\alpha(t)}{dt} \right)^2 + \cos \alpha(t) \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \right]$$

### 3.2 Bilance momentů - kyvadlo

Při popisu rotačního pohybu kyvadla je potřeba uvažovat kroučící momenty. Úhel natočení kyvadla je označen  $\alpha$  a jeho kladná hodnota označuje otáčení proti směru hodinových ručiček. Momenty  $M_{ak}$  (v důsledku akcelerace vozíku),  $M_{ok}$  (vyvolaný odpor) a  $M_x$  (vyvolaný silami  $F_{xd}$  a  $F_{xk}$  působícími v důsledku změny polohy kyvadla vůči vozíku v ose  $x$ ) musí být v rovnováze s působením momentu  $M_g$  od gravitační síly  $g$ . Gravitační síla je však orientovaná směrem dolů a proto je ji potřeba ve formulaci (2) uvažovat se záporným znaménkem. Bilanci momentů (tj. závislost úhlu natočení kyvadla  $\alpha$  na poloze vozíku  $x$ ) lze popsat rovnicí

$$M_{ak} + M_{ok} + M_x = -M_g \quad [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = N \cdot m] \quad (2)$$

kde

$M_{ak} = J_k \frac{d^2\alpha}{dt^2}$	moment setrvačný kyvadla	$J_k = \frac{1}{3}m_d d^2 + m_k d^2$ [kg.m <sup>2</sup> ]
$M_{ok} = k_k d \frac{d\alpha}{dt}$	moment aproximující odpor kyvadla	$k_k$ [kg.m.s <sup>-1</sup> ]
$M_g = \frac{d}{2} m_d g \cdot \sin(\alpha) + d \cdot m_k g \cdot \sin(\alpha)$	moment působící v těžišti ramena + závaží (gravitace)	
$M_x = \frac{d}{2} F_{xd} \cos(\alpha) + d \cdot F_{xk} \cos(\alpha)$	moment působící v těžišti ramena + závaží (vozík)	

### 3.3 Bilance napětí a momentů - motor

Popis dynamiky stejnosměrného kartáčového elektromotoru s permanentními magnety vychází ze zapojení na obrázku 4 a je tvořen elektrickou částí (bilanci napětí na jednotlivých částech tj. aplikace Kirchofových zákonů – rovnice 3) a mechanickou částí (bilance momentů – rovnice 4). Obě části propojuje magnetické pole  $\Phi$ , které je obecně funkcí protékajícího proudu  $i$ . Zde je zaveden zjednodušující předpoklad, že magnetické pole je v oblasti pracovních proudů konstantní. Konkrétní hodnoty jsou zahrnuty v rychlostní konstantě  $k_u$  a momentové konstantě  $k_m$ , které lze zjistit nebo dopočítat z informací o motoru dodané výrobcem. Bilanci napětí a momentů (tj. závislost proudu motoru  $i$  a úhlu natočení rotoru motoru  $\varphi$  na napájecím napětí  $z \cdot U_0$  a zatížení motoru  $M_{za}$ ) lze vyjádřit jako

$$U_R + U_L + U_m + U_z = z \cdot U_0 \quad [V] \quad (3)$$

kde

$U_R = R \cdot i$	úbytek napětí na odporu vinutí	
$U_L = L \frac{di}{dt}$	úbytek napětí na indukčnosti vinutí	
$U_m = k_u \Phi \frac{d\varphi}{dt}$	elektromotorické napětí (rychlostní konstanta) $k_u$ [V.s]	
$U_{Rz} = R_z i$	úbytek napětí na vnitřním odporu zdroje	
$-1 \leq z \leq 1$	řídící signál pohonu motoru	

$$M_{am} + M_{om} + M_{za} = M_m \quad [kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = N \cdot m] \quad (4)$$

kde

$M_{am} = J_m \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	moment setrvačný všech rotačních částí (motor, řemenice)	
$M_{om} = k_o \frac{d\varphi}{dt}$	moment aproximující odpor rotačních částí	
$M_{za}$	moment zátěže	
$M_m = k_m \Phi \cdot i$	moment motoru (momentová konstanta)	$k_m$ [N.m.A <sup>-1</sup> ]

### 3.4 Vazba mezi motorem a pohybem vozíku

Převod otáček motoru na pohyb vozíku je realizován řemenem vedeným řemenicí o poloměru  $r$  umístěnou na ose motoru. Předpokládá se dokonale tuhé spojení, tj. neuvažuje se pružnost řemenu. Za tohoto předpokladu je propojení úhlu natočení motoru  $\varphi$  a dráhy vozíku  $x$  popsáno algebraickou rovnicí (5), která propojuje jednak úhel natočení motoru  $\varphi$  s polohou vozíku  $x$  a jednak zátěžový moment motoru  $M_{za}$  se silou  $F$  působící na vozík. Ve vztazích je uvažována i případná převodovka s převodovým poměrem  $P$ . V našem případě je převodový poměr  $P=1$ .

$$F = \frac{P}{r} M_{za} \quad , \quad \varphi = \frac{P}{r} x \quad [kg \cdot m \cdot s^{-2}], [-] \quad (5)$$

## 4 Výsledný matematický spojitý model

### 4.1 Nelineární dynamický model

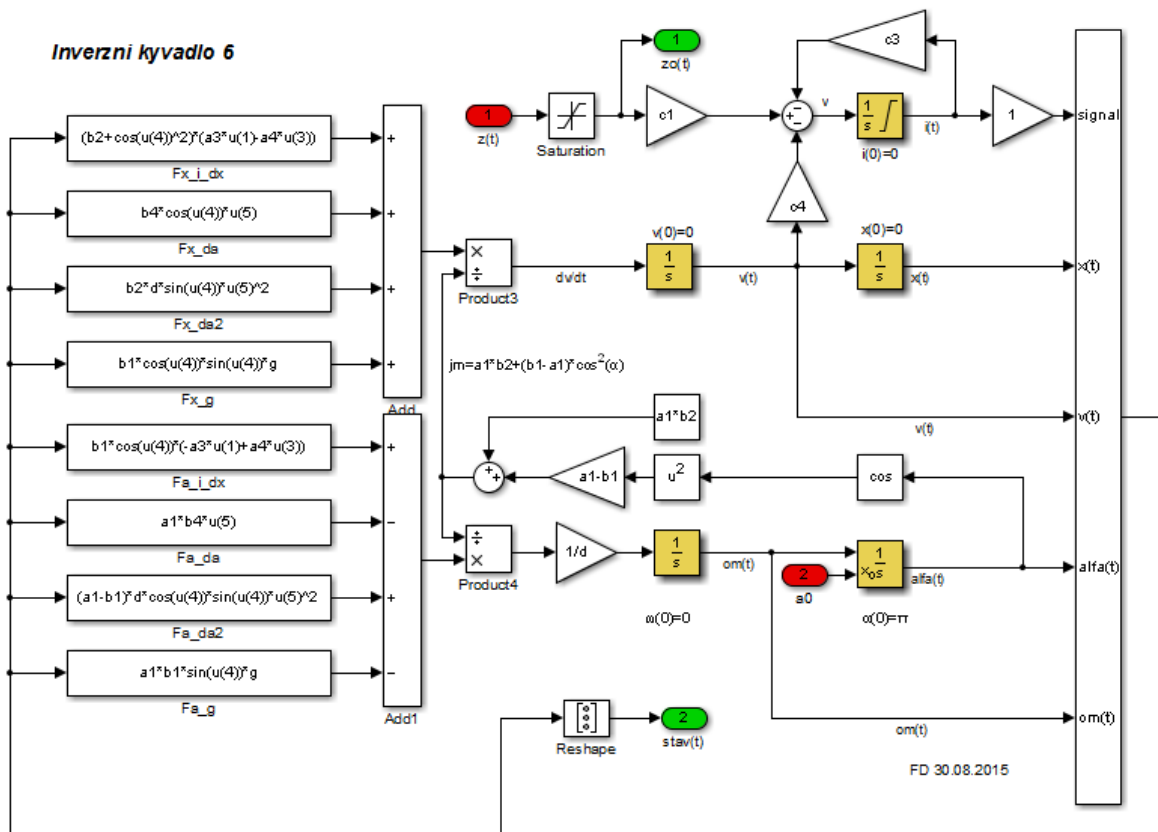
Po konkretizaci jednotlivých sil, momentů a napětí v rovnicích (1) až (5), vyloučení vazebních sil mezi všemi částmi, osamostatnění nejvyšších derivací a zavedení substitucí slučujících hodnoty konstantních parametrů dostaneme soustavu tří diferenciálních rovnic ve tvaru vhodném pro simulační výpočty. Výsledný model je 5. řádu.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{m_v + m_d + m_k + \frac{p^2}{r^2}(J_m + J_p)}{\frac{1}{2}m_d + m_k} \quad [-] & a_3 &= \frac{\frac{p}{r}k_m\Phi}{\frac{1}{2}m_d + m_k} \quad [m \cdot s^{-2}A^{-1}] & a_4 &= \frac{k_o \frac{p^2}{r^2} + k_v}{\frac{1}{2}m_d + m_k} \quad [s^{-1}] \\
 b_1 &= \frac{\frac{1}{2}m_d + m_k}{\frac{1}{4}m_d + m_k} \quad [-] & b_2 &= \frac{\frac{1}{3}m_d + m_k}{\frac{1}{4}m_d + m_k} \quad [-] & b_4 &= \frac{k_k}{\frac{1}{4}m_d + m_k} \quad [m \cdot s^{-1}] \\
 c_1 &= \frac{U_0}{L} & c_3 &= \frac{R + R_z}{L} & c_4 &= \frac{k_u}{L} \Phi \frac{p}{r}
 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$jm = a_1 b_2 + (a_1 - b_1) \cos^2(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt} &= -c_3 i - c_4 \frac{dx}{dt} + c_1 z \\
 \frac{d^2 x}{dt^2} &= a_3 \frac{b_2 + \cos^2(\alpha)}{jm} i - a_4 \frac{b_2 + \cos^2(\alpha)}{jm} \frac{dx}{dt} + b_4 \frac{\cos(\alpha)}{jm} \frac{d\alpha}{dt} + b_2 d \frac{\sin(\alpha)}{jm} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + b_1 \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{jm} g \\
 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -a_3 b_1 \frac{\cos(\alpha)}{d \cdot jm} i + a_4 b_1 \frac{\cos(\alpha)}{d \cdot jm} \frac{dx}{dt} - a_1 b_4 \frac{1}{d \cdot jm} \frac{d\alpha}{dt} + (a_1 - b_1) \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{jm} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - a_1 b_1 \frac{\sin(\alpha)}{d \cdot jm} g
 \end{aligned} \quad (6b)$$

Diferenciální rovnice (6b) popisují časový vývoj pěti stavových veličin ( $x$ ,  $v=x'$ ,  $\alpha$ ,  $\omega=\alpha'$  a  $i$ ) v závislosti na počátečních podmínkách a průběhu napájecího napětí motoru vyjádřeného řídicí proměnnou  $z$ . Všechny veličiny mají fyzikální význam a lze je přímo porovnávat s měřeními hodnotami. Tento model lze vyjádřit v zapojení SIMULINKu (subsystém s hodnotami parametrů definovanými v pracovním prostoru MATLABu), které je ukázáno na obrázku 5.



Obrázek 5 Nelineární model - SIMULINK

Vstupem uvedeného subsystému je řídicí signál (řídicí proměnná  $z$ ) odpovídající napájecímu napětí elektromotoru a počáteční úhel natočení kyvadla  $\alpha_0$ . Počáteční hodnoty ostatních stavových veličin jsou nulové. Výstupem je sloupcový vektor stavových veličin.

## 4.2 Lineární aproximace nelineárního dynamického modelu

Lineární aproximace nelineárního modelu je provedena pro ustálený stav v horní metastabilní pozici tj.  $\alpha_0 = \pi$ . Tento bod odpovídá pracovnímu bodu, v okolí kterého bude probíhat stabilizace polohy kyvadla při regulaci na žádanou polohu vozíku. Vzhledem k tomu, že nelinearita modelu (6b) je dána goniometrickými funkcemi úhlu natočení kyvadla a kvadrátem úhlové rychlosti kyvadla stačí nahradit goniometrické funkce jejich prvními derivacemi ve zvoleném pracovním bodě a zavést novou stavovou proměnnou  $\beta$  jako odchylku úhlu natočení kyvadla  $\alpha$  od pracovního bodu. Odpovídající vztahy jsou dány rovnicemi (7)

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= \beta \\ \cos(\alpha) &= \cos(\pi + \beta) \approx -1 \quad \sin(\alpha) = \sin(\pi + \beta) \approx -\beta \\ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 \approx 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Po dosazení do (6b), zavedení nových stavových proměnných rychlosti vozíku  $v$  a rychlosti otáčení kyvadla  $\omega$  a vyjádření v maticovém tvaru dostaneme tvar standardního stavového modelu

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3 & 0 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ +\frac{(b_2+1)a_3}{a_1b_2+a_1-b_1} & 0 & -\frac{(b_2+1)a_4}{a_1b_2+a_1-b_1} & +\frac{b_1g}{a_1b_2+a_1-b_1} & -\frac{b_4}{a_1b_2+a_1-b_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ +\frac{a_3b_1}{(a_1b_2+a_1-b_1)d} & 0 & -\frac{a_4b_1}{(a_1b_2+a_1-b_1)d} & +\frac{a_1b_1g}{(a_1b_2+a_1-b_1)d} & -\frac{a_1b_4}{(a_1b_2+a_1-b_1)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ x \\ v \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (8)$$

## 5 Simulace

Parametry modelu použité v simulačních experimentech jsou shrnuty v tabulce 1. Hodnoty koeficientů odporu pohybu vozíku  $k_v$  a odporu otáčení kyvadla  $k_k$  jsou odhadnuty tak, aby doby do ustálení přibližně odpovídaly chování reálného zařízení. Tyto hodnoty jsou v tabulce 1 v silně ohraničených polích a budou určovány v rámci experimentální identifikace.

Parametry motoru tj. odpor vinutí  $R$ , rychlostní konstanta  $k_u$ , momentová konstanta  $k_m$  a konstanta odporu  $k_o$  (hodnoty v šedých polích) jsou dopočítány z rovnic (3,4) tak, aby odpovídaly charakteristikám motoru (proud  $i_0$  a otáčky  $\omega_0$  při běhu naprázdno, proud  $i_s$  a moment  $M_s$  při nulových otáčkách – hodnoty tučně převzatých z dokumentace motoru. Hodnota indukčnosti vinutí  $L$  byla změřena.

Tabulka 1 Simulační experimenty – hodnoty parametrů

Symbol	Rozměr	Hodnota	Význam
$g$	$\text{m.s}^{-2}$	9,81	gravitační konstanta
$m_v$	kg	0,396	hmotnost vozíku
$k_v$	$\text{kg.m.s}^{-1}$	0,6	koeficient odporu pohybu vozíku (odhad)
$m_d$	kg	0,04	hmotnost ramene kyvadla
$m_k$	kg	0	hmotnost závaží kyvadla
$d$	m	0,525	délka ramene kyvadla
$k_k$	$\text{kg.m.s}^{-1}.\text{rad}^{-1}$	0,01	koeficient odporu otáčení kyvadla (odhad)
$J_k$	$\text{kg.m}^2$	0,003675	moment setrvačnosti celého kyvadla
$U_0$	V	19	napětí zdroje
$R_z$	$\Omega$	0,05	vnitřní odpor zdroje
$L$	H	$0,1 \cdot 10^{-3}$	indukčnost vinutí motoru
$\omega_0$	rpm	<b>4550</b>	otáčky motoru při nulové zátěži ( $M_{za}=0$ )
	$\text{rad.s}^{-1}$	476,47	
$i_0$	A	<b>0.15</b>	proud motoru při nulové zátěži ( $M_{za}=0$ )

Symbol	Rozměr	Hodnota	Význam
$M_s$	N.cm	<b>13.0</b>	maximální zátěž motoru ( $\omega=0$ )
	N.m	0.137	
$i_s$	A	<b>2.5</b>	proud motoru při maximální zátěži ( $\omega=0$ )
$R$	$\Omega$	7.6	odpor vinutí motoru $R=U_0/i_s$
$k_u$	V.s.rad <sup>-1</sup>	0,037484	rychlostní konstanta motoru $k_u\phi = \frac{U_0-R.i_0}{\omega_0}$
$k_m$	N.m.A <sup>-1</sup>	0.052	momentová konstanta motoru $k_m\phi = \frac{M_s}{i_s}$
$k_o$	N.m.s <sup>-1</sup> .rad <sup>-1</sup>	$1,6372 \cdot 10^{-5}$	koeficient odporu otáčení motoru $k_o = \frac{M_s i_0}{i_s \omega_0}$
$J_m$	g.cm <sup>2</sup>	45.0	moment setrvačnosti rotoru motoru
	kg.m <sup>2</sup>	$45.0 \cdot 10^{-7}$	
$J_r$	kg.m <sup>2</sup>	$1 \cdot 10^{-5}$	moment setrvačnosti ostatních částí pohonu (odhad)
$r$	m	$7 \cdot 10^{-3}$	poloměr řemenice

## 5.1 Verifikace nelineárního dynamického modelu

Základní verifikace správnosti odvozených vztahů vychází z fyzikální představy. Výsledky řešení modelu musí principiálně odpovídat chování reálného zařízení. Lze předpovědět (či experimentálně zjistit) chování reálného zařízení v určitých speciálních situacích. Některé situace a předpokládané chování jsou shrnuty v Tabulce 2

Tabulka 2 Simulační experimenty – podmínky a očekávané chování

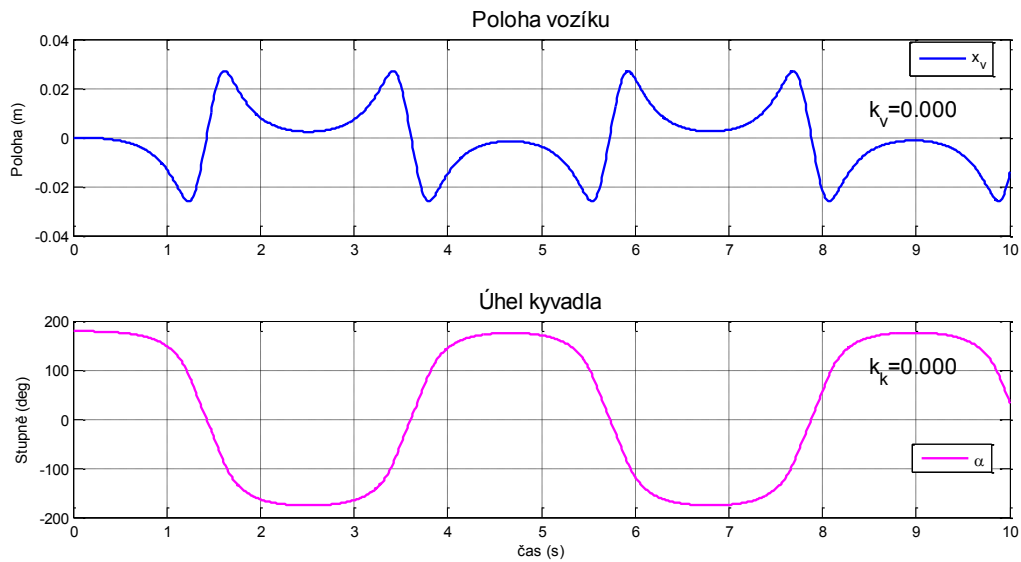
Experiment		Počáteční stav	Očekávané chování	
			Vozík	Kyvadlo
A	bez odporu ( $k_v = k_k = 0$ ), odpojený motor, metastabilní poloha s počáteční odchylkou	$x=v=0$ $\omega=0$ $\alpha=\pi-\Delta$	ustálené trvalé kmity okolo počáteční polohy s konstantní amplitudou	ustálené trvalé kmity s konstantní amplitudou odpovídající počáteční poloze
B	s odpory ( $k_v, k_k$ ) dle tabulky 1, odpojený motor, metastabilní poloha s počáteční odchylkou	$x=v=0$ $\omega=0$ $\alpha=\pi-\Delta$	tlumené kmity, ustálení v počáteční poloze $x=0$	tlumené kmity, ustálení v dolní stabilní poloze $\alpha=0$
C	s odpory ( $k_v, k_k$ ) dle tabulky 1, připojený motor, dolní stabilní poloha kyvadla	$x=v=0$ $\omega=\alpha=0$ $U_0=\text{puls}^1$	pohyb po dobu trvání napájecího napětí, ustálení v nové poloze	počáteční výchylka v opačném směru než je směr pohybu vozíku, ustálení v poloze $\alpha=0$

V grafech na obrázcích 6-7, odpovídajících experimentům A-B dle tabulky 2, jsou zaznamenány časové průběhy polohy vozíku  $x$  a úhlu otočení kyvadla  $\alpha$  po dobu 10 s. V případě experimentu C je obrázek 8 doplněn o průběh napájecího napětí motoru  $U_0$ , proudu motoru  $i$  a průběh otáček motoru  $\omega$ . Ve všech případech je splněno očekávané chování, že směr pohybu vozíku a směr otáčení kyvadla jdou proti sobě.

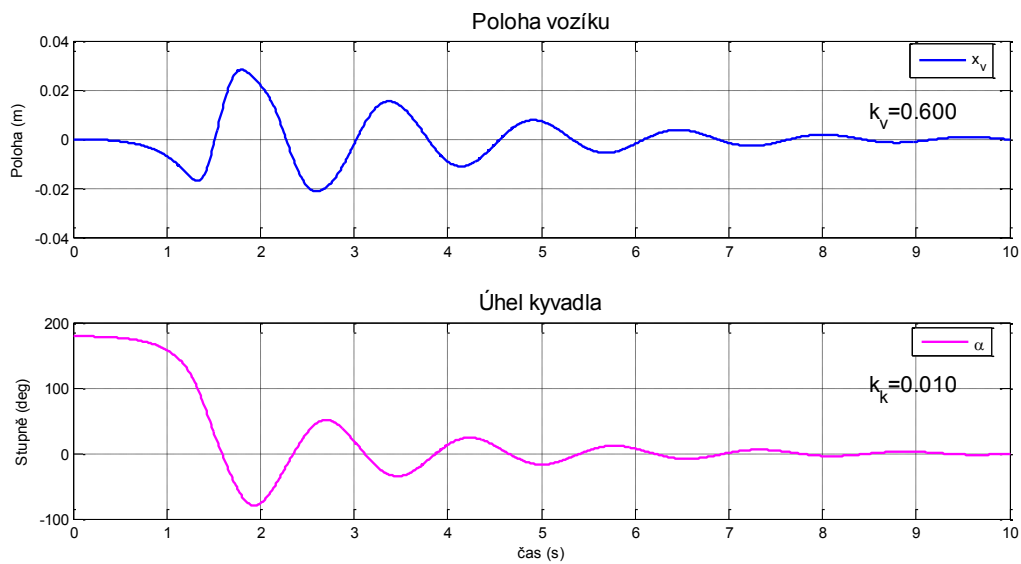
## 5.2 Porovnání nelineárního a linearizovaného dynamického modelu

Aproximace nelineárního modelu (8) modelem lineárním byla provedena v okolí horní metastabilní polohy. Velikost okolí tj. rozsah úhlu natočení kyvadla  $\alpha$ , kde je aproximace vyhovující, lze odhadnout z výsledku simulačního experimentu zobrazeného na Obrázku 9. Jsou porovnány průběhy polohy vozíku, úhlu natočení kyvadla a proudu motoru v prvních dvou sekundách po změně napájecího napětí motoru z 0 na 3 V. Na začátku je vychýleno o 2° doprava ( $\alpha=178^\circ$ ) vůči horní metastabilní poloze. Pohyb vozíku vyvolaný otáčením motoru působí proti pádu kyvadla a jeho pohyb poněkud zpomaluje. Z průběhů je zřejmé, že největší rozdíly jsou v poloze kyvadla. Ale i zde jsou rozdíly do cca 20° relativně malé. Proto lze lineární model použít pro regulaci polohy vozíku s kyvadlem, pokud případné poruchy způsobí jen relativně malé výchylky kyvadla.

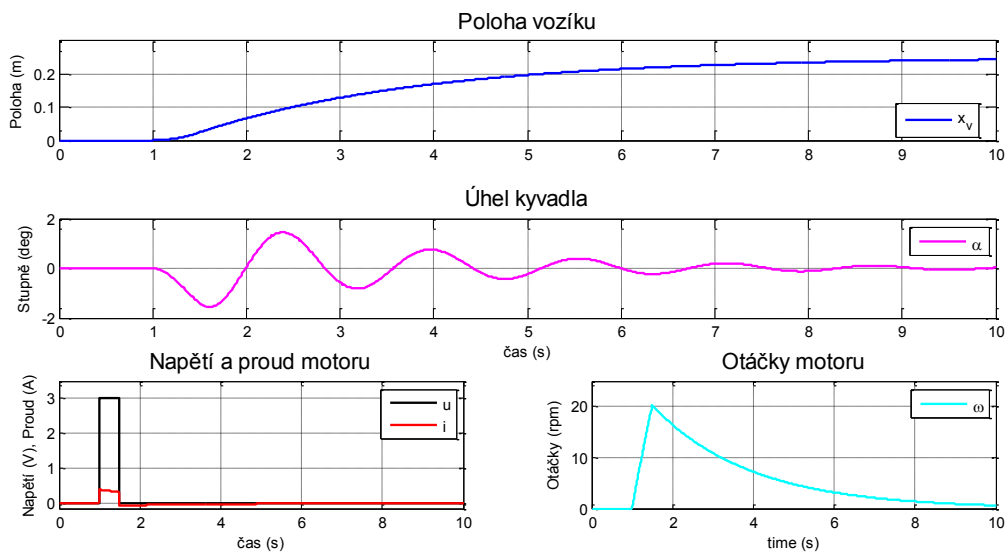
<sup>1</sup> obdélníkový puls v čase 1 s, délce 0.5 s a velikosti 3 V (napájecí napětí motoru)



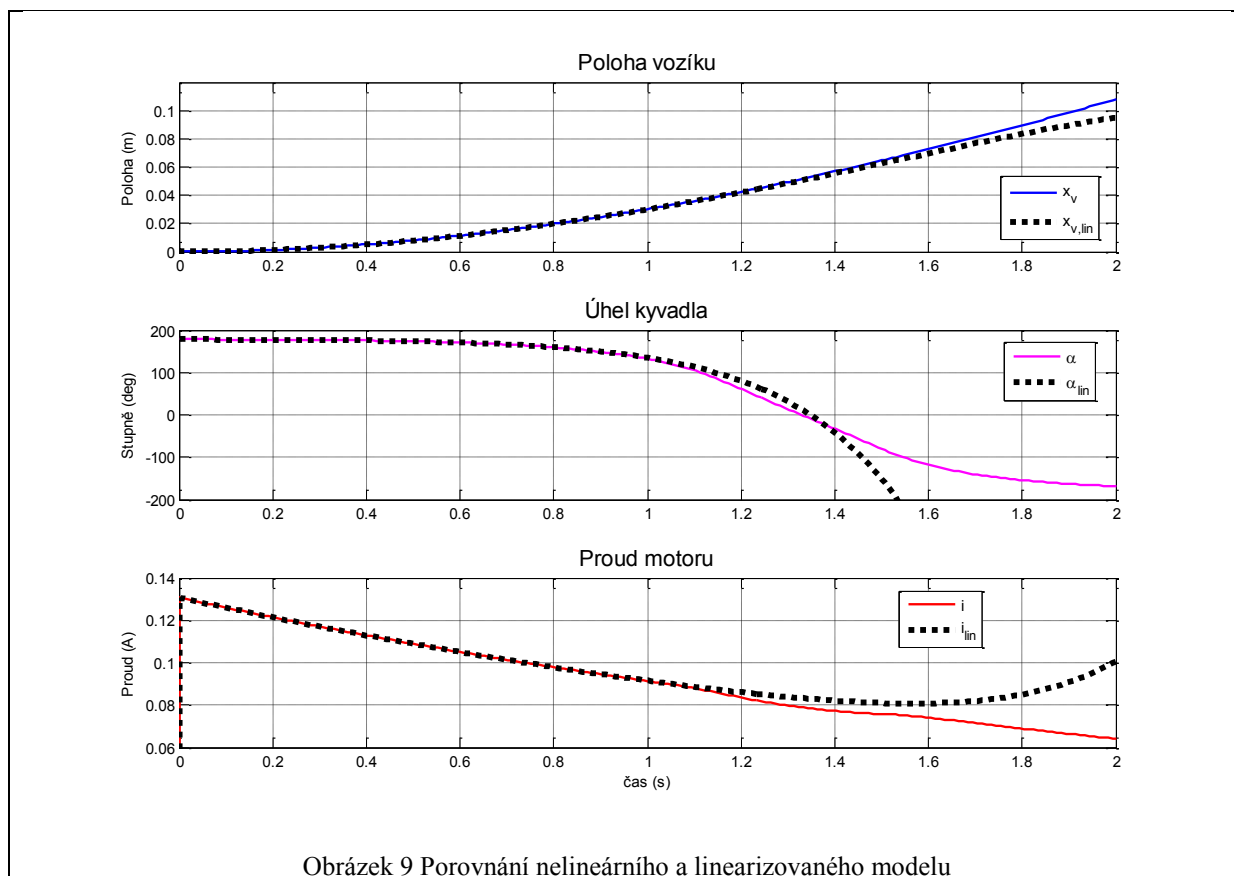
Obrázek 6 Experiment A



Obrázek 7 Experiment B



Obrázek 8 Experiment C



## 6 Závěr

V sestaveném matematickém modelu mají všechny veličiny fyzikální význam a hodnoty 15 parametrů modelu z 18 celkem lze přímo určit na základě známých parametrů zařízení. To umožňuje ve fázi verifikace modelu pomocí simulace jednoduše porovnávat získané průběhy s představou o chování reálného zařízení. Tento přístup také výrazně usnadňuje experimentální identifikaci, protože je potřeba určit pouze 3 neznámé parametry (navíc s odhadnutelnými počátečními hodnotami). Po identifikaci neznámých parametrů nelineárního modelu z naměřených dat na reálném zařízení bude na jeho základě vytvořen aproximační diskretní lineární dynamický model. Tento bude využit k návrhu a realizaci stavového regulátoru polohy vozíku s udržováním kyvadla v horní metastabilní poloze. Protože měřeny jsou pouze dvě veličiny (poloha vozíku a poloha kyvadla), bude lineární diskretní model využit i k návrhu a realizaci estimátoru stavu. Simulace řízení zařízení popsaného spojitým nelineárním modelem pomocí diskretního lineárního regulátoru s estimací stavu umožní získat představu o chování regulátoru za ideálních podmínek a určit výchozí hodnoty volitelných parametrů (např. velikost intervalu vzorkování), které budou použitelné při zahájení experimentů na reálném zařízení.

## 7 Literatura

- [1] ŠREJTR, Josef. *Technická mechanika II: Kinematika I.část*. Praha: SNTL, 1954, 256 s.
- [2] HORÁK, Zdeněk a František KRUPKA. *Fyzika: Svazek I*. Praha: SNTL, 1976, 424 s.
- [3] Technical Guide: MABUCHI MOTOR. *MABUCHI MOTOR Co., Ltd* [online]. 2015 [cit. 2015-09-29]. Dostupné z: [http://www.mabuchi-motor.co.jp/en\\_US/technic/index.html](http://www.mabuchi-motor.co.jp/en_US/technic/index.html)